Evaluation des incertitudes de mesure

Jean-Marc BRETEAU

Table des matières

Introduction

En optique comme dans les autres sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes. Celles-ci ne peuvent être qu'entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon la méthode choisie, le mode opératoire, la qualité des instruments de mesures ou l'habileté du manipulateur.

Évaluer l'incertitude sur une mesure est une démarche complexe qui constitue une branche des sciences appelée métrologie. De manière à ce que cette évaluation soit basée sur un consensus large et universellement reconnu, il existe un guide pour l'expression des incertitudes de mesure dont la version française est la norme NF ENV 13005 datée d'août 1999 [1]. En ce qui concerne le vocabulaire à employer, la norme NF X07-001 de décembre 1994 [2] rassemble l'ensemble du Vocabulaire International de Métrologie (VIM).

Vocabulaire de base

Les formats et termes généraux rassemblés dans le tableau 1 seront utilisés dans la suite du document.

Écriture	Signification
Y	Mesurande, grandeur à mesurer
y	Mesure de la grandeur *Y*
u(Y)	Incertitude-type
U(Y)	Incertitude élargie
$\frac{U(Y)}{y}$	Incertitude relative

Tableau 1 : conventions d'écriture et signification des symboles de base

Remarque :

- Ne pas confondre Y et y : Y désigne la grandeur faisant l'objet d'un mesurage alors que y désigne le résultat numérique du mesurage.
- La notation u et U provient de l'anglais «uncertainty»

Types de mesure

La mesure y d'une grandeur Y peut être obtenue :

- soit directement comme dans le cas de la mesure d'une distance X à l'aide d'un réglet
- soit indirectement comme dans le cas de la mesure d'un déplacement L par méthode interférométrique.

Dans le premier cas la relation fonctionnelle est simple du type $Y=X$ voire $Y=\bar{X}$ si on réalise N mesures répétées de la distance X et qu'on en prend la valeur moyenne $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

Dans le second cas, le déplacement L est tel que $L=p\frac{\lambda_{VIDE}}{n(T,P,H)}$ où p est un entier, λ_{VIDE} la longueur d'onde dans le vide de la source lumineuse utilisée dans l'interféromètre et n(T,P,H) l'indice du milieu (air par exemple) dans lequel se propage les rayons lumineux, lui-même fonction de la température T du milieu ambiant, de sa pression P et de son degré d'hygrométrie H.

D'une manière générale, on aura $Y=f(X_1, X_2,...)$ où $X_1, X_2, ..., X_j$ seront des grandeurs d'entrée faisant généralement l'objet d'un mesurage direct.

Cours

I

A. Remarques préliminaires

Lorsqu'on rend compte du résultat d'un mesurage d'une grandeur physique, il faut donner une indication quantitative sur la qualité du résultat de mesure pour que ceux qui l'utiliseront puissent estimer sa fiabilité. En l'absence d'une telle indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés, soit entre eux, soit par rapport à des valeurs de référence issues d'une spécification ou d'une norme.

La notion d'incertitude comme attribut quantifiable de la qualité du résultat d'un mesurage est relativement nouveau dans l'histoire de la mesure bien que l'erreur et l'analyse des erreurs soient depuis longtemps inclus en métrologie. On considère en fait que lorsqu'on a évalué la totalité des composantes de l'erreur connues ou soupçonnées et que les corrections appropriées ont été appliquées, il subsiste encore une incertitude sur la validité du résultat exprimé, c'est à dire un doute sur la manière dont le résultat de mesure représente correctement la valeur de la grandeur mesurée.

La définition formelle du terme « incertitude de mesure » est donnée dans le VIM (§ 3,9).

D'un point de vue pratique, on exprimera l'incertitude d'un mesurage sous la forme d'un écart-type au sens statistique, on parlera alors d'incertitude-type u(Y).

B. Évaluation de l'incertitude-type

Une estimation du mesurande Y, notée y, est obtenue à partir de l'équation $Y = f(X_{1,} X_{2,} \ldots)$ appelée **modèle mathématique du mesurage**, en utilisant les estimations x_1, x_2, ..., x_j des grandeurs d'entrée X_1, X_2, ..., X_j. L'écart-type associé à l'estimation de sortie ou au résultat de mesure y, appelé **incertitude-type composée** et noté $u_c(y)$, est déterminé à partir de l'écart-type estimé associé à chaque estimation d'entrée x_i appelé **incertitude-type** et noté $u(x_i)$. Chaque estimation d'entrée x_i et son incertitude-type associée $u(x_i)$ sont obtenues à partir d'une loi de répartition des valeurs possibles de la grandeur d'entrée X_i. Cette loi de probabilité peut être fondée sur une série d'observations répétées $X_{i,k}$ des X_i, on parlera alors d'**évaluation de**

Type A des composantes de l'incertitude-type ou ce peut être une loi à priori correspondant alors à une **évaluation de Type B**. Dans les deux cas, les lois employées représentent le niveau de connaissance que l'on a du moyen de mesure.

1. Évaluation de Type A

C'est le cas où l'opérateur réalise une série de mesures répétées dans les conditions de répétabilité (cf. VIM §3.6)

La moyenne arithmétique $\bar{X}_i$ obtenue par l'équation $\bar{X}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{i,k}$ est utilisée comme la meilleure estimation de la grandeur d'entrée X_i. Les valeurs des observations individuelles $x_{i,k}$ diffèrent en raison des variations aléatoires des grandeurs d'influence. La variabilité des valeurs observées $x_{i,k}$ ou plus exactement leur dispersion autour de leur moyenne $\bar{x}_i$ est appelée **écart-type expérimental** et se note :

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(x_{i,k} - \bar{x}\right)^2}$$

On en déduit l'**écart-type expérimental de la moyenne** $s(\bar{x}_i)$ tel que : $s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}}$ c'est à dire :

$$s(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(x_{i,k} - \bar{x}\right)^2}$$

Dans la pratique, l'écart-type expérimental de la moyenne est appelé **incertitude de répétabilité**.

2. Évaluation de Type B

Si un laboratoire de mesure disposait de ressources et d'un temps illimités, il pourrait effectuer une recherche statistique exhaustive de toutes les causes imaginables d'incertitude, en utilisant par exemple des instruments de différents types et de différents fabricants, avec différentes méthodes de mesure, différents modes opératoires et différentes approximations dans les modèles théoriques du mesurage.

Les incertitudes associées à toutes ces causes pourraient être alors évaluées par l'analyse statistique de séries d'observations et l'incertitude due à chaque cause pourrait être caractérisée par un écart-type évalué statistiquement. Finalement, toutes les composantes de l'incertitude seraient obtenues par des évaluations de Type A.

Comme une telle étude n'est pas envisageable économiquement, de nombreuses composantes de l'incertitude doivent être évaluées par tous les autres moyens praticables. L'ensemble des informations recherchées peut comprendre :

- des résultats de mesures antérieures,
- la connaissance générale ou empirique du comportement des instruments utilisés,
- les spécifications du fabricant,
- les certificats d'étalonnage,
- l'incertitude attribuée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages, manuels et autres normes.

Ainsi pour une estimation x_i d'une grandeur X_i. qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée $u^2(x_i)$ ou l'incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles à propos de la variabilité possible de X_i . L'incertitude-type ainsi évaluée est appelée **incertitude-type de Type B**.

En pratique, il est notamment nécessaire de faire un bilan des erreurs que l'on répartit en :

- Erreurs systématiques (cf. VIM §3.14) telles que l'erreur de parallaxe lors de la lecture sur un cadran à aiguille, le réglage de zéro d'un appareil, les erreurs de méthode, le vieillissement des composants, ...
- Erreurs aléatoires (cf. VIM §3.13) telles que les erreurs de lecture ou dues à l'appareil lui-même, ou dues aux conditions extérieures (température, dilatation thermique, pression atmosphérique, humidité, ...).

a) Lois de probabilité à priori

Pour arriver à exprimer l'incertitude de Type B sous forme d'un écart-type, il faut recourir à des lois de probabilité dont les plus employées sont rassemblées dans le tableau 2. À noter qu'elles se rapportent içi à une distribution de valeurs d'une variable aléatoire de moyenne μ=0 et d'étendue $[-a\,;+a]=2a$

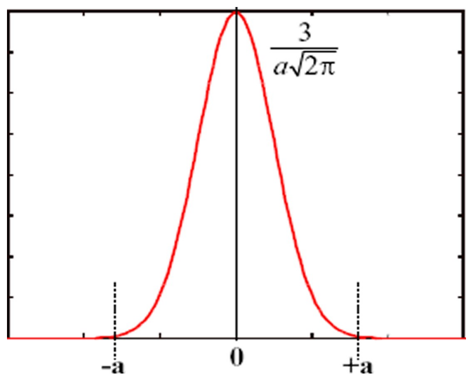
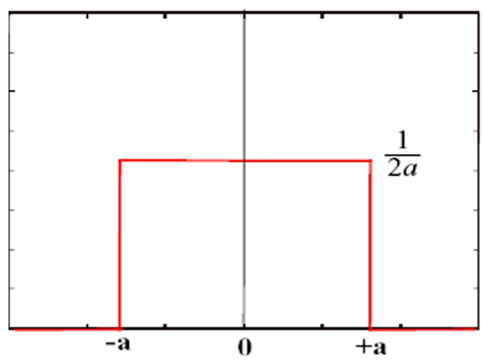
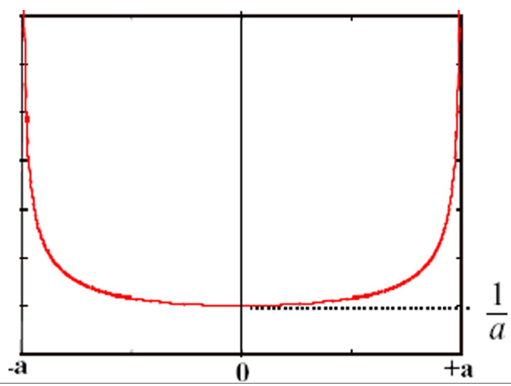
Loi	Représentation graphique	Écart-type
Normale ou gaussienne $a=3\,\sigma$		$\frac{a}{3}$
Uniforme ou rectangulaire		$\frac{a}{\sqrt{3}}$
Dérivée d'arc sinus		$\frac{a}{\sqrt{2}}$

Tableau 2 : Lois de probabilité usuelles pour l'évaluation des incertitudes de Type B

D'une manière générale, si le constructeur fournit l'incertitude-type, on l'utilise directement.

Si on a très peu d'information sur une grandeur d'entrée et que l'intervalle de variation supposé de celle-ci est de la forme :

- $\Delta x = \pm a$ alors l'incertitude-type est : $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$
- $\Delta x = q$ alors l'incertitude-type est : $u(x) = \frac{q}{2\sqrt{3}}$

en considérant une loi uniforme sur l'intervalle de variation de la grandeur.

b) Exemples d'incertitudes de Type B

- **Résolution d'un appareil de mesure**

  La graduation d'un instrument de mesure analogique ou l'afficheur d'un appareil numérique sont des sources d'incertitude. Si la résolution du dispositif de lecture est δ_x, la valeur du signal d'entrée qui produit une indication donnée X peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle $[X - \frac{\delta x}{2} ; X + \frac{\delta x}{2}]$, le signal d'entrée est alors décrit par une loi de probabilité rectangulaire de largeur δ_x et d'écart-type $u_{res}(x) = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$ appelée **incertitude de résolution**.

- **Classe d'un instrument**

  L'Erreur Maximale Tolérée (EMT ; cf. VIM §5.21) donne les limites extrêmes de variation de l'indication obtenue d'un instrument de mesure de classe définie par l'intervalle $[-a ; +a]$. L'incertitude-type associée est alors $u_{classe}(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

- **Hystérésis**

  L'indication d'un instrument peut différer d'une quantité fixe selon que les lectures successives se font par valeurs croissantes ou décroissantes. La plupart du temps le sens de l'hystérésis n'est pas observable. Si la largeur de l'étendue des lectures possibles dues à cette cause est δ_x, l'incertitude-type due à l'hystérésis est $u_{hyst}(x) = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$.

- **Variations de température**

  Une des principales grandeurs d'influence d'un système de mesure est la température d'environnement du moyen de mesure (local, enceinte climatisée, boîtier, ...). Dans la mesure où la température varierait entre 2 extrema de façon quasi sinusoïdale, la loi de probabilité associée à cette grandeur d'influence est la fonction dérivée d'arc sinus. Si les variations de la température sont telles que $\Delta T = \pm b$ alors l'incertitude-type due aux variations de température est $u_{temp}(T) = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

C. Incertitude-type composée

1. Grandeur Y mesurée directement

Il faut la plupart du temps combiner les incertitudes de Type A et de Type B de telle manière que :

$$u(y)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}$$

autrement dit

$$u(y)=\sqrt{u_{rép}^2+u^2(instrument)+u^2(autres)}$$

avec

$u^2_{\text{rép}}$:	Incertitude de répétabilité
u^2(instrument):	Incertitude-type (de Type B) de l'instrument mesure prenant en compte les contributions décrites dans la partie précédente 'Exemples d'incertitudes de Type B' telles que par exemple : $u^2(\text{instrument}) = u^2_{\text{rés}}(x) + u^2_{\text{hyst}}(x)$
u^2(autres):	Incertitudes-types (de Type B) autres que celles associées à l'instrument de mesure (résultats de mesures antérieures, expérimentateur, ...)

a) Cas d'une mesure unique

Comme il n'y a qu'une seule mesure effectuée, $u_{rép}=0$ donc :

$$u(y)=\sqrt{u^2(instrument)+u^2(autres)}$$

Exemple

On mesure une seule fois un courant électrique à l'aide d'un ampèremètre dont l'incertitude-type est de 2,9mA. Des résultats de mesures antérieures ont donné une incertitude-type de 5,2mA.

L'incertitude-type sur la valeur de l'intensité I mesurée est :

$$u(I)=\sqrt{u^2(ampèremètre)+u^2(autres)}=[(2{,}9)^2+(5{,}2)^2]^{1/2}=5{,}9\Rightarrow u(I)=5{,}9\,mA$$

b) Cas de mesures répétées

Dans ce cas l'incertitude de répétabilité est évaluée à partir des N mesures répétées.

Exemple

On effectue 9 fois une même mesure de courant à l'aide d'un ampèremètre dont l'incertitude-type est de 2,9mA.

$$I(A)=2{,}16\,;\,2{,}12\,;\,2{,}15\,;\,2{,}15\,;\,2{,}17\,;\,2{,}18\,;\,2{,}16\,;\,2{,}15\,;\,2{,}14$$

Aucune autre information n'est donnée ni disponible.

L'incertitude-type sur la valeur de l'intensité I mesurée est :

$$u(I)=\sqrt{u_{rép}^2+u^2(ampèremètre)}=[(5{,}77)^2+(2{,}9)^2]^{1/2}=6{,}46\Rightarrow u(I)=6{,}5\,mA$$

2. Grandeur Y mesurée indirectement

Pour un mesurande Y fonction de plusieurs grandeurs d'entrée X_i suivant le modèle mathématique du mesurage $Y=f(X_1, X_2, ...)$, l'incertitude-type de y est obtenue par composition des incertitudes-types des estimations d'entrée x_i. Cette **incertitude-type composée** de l'estimation y est notée $u_c(y)$.

Dans la mesure où la fonction f ne présente pas de non-linéarité importante, on développe celle-ci autour des espérances mathématiques $E(x_i)=\mu_i$ des grandeurs d'entrée x_i. Le développement en série de Taylor au premier ordre donne, pour des petites variations de y autour de μ_y :

$$y-\mu_y=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\mu_i)$$

Le carré de la différence $y-\mu_y$ est alors donné par :

$$(y-\mu_y)^2=[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\mu_i)]^2$$

qui peut être écrit sous la forme

$$(y-\mu_y)^2=\sum_{i=1}^{p}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2(x_i-\mu_i)^2+2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$$

L'espérance mathématique de $(y-\mu_y)^2$ est la variance de y, soit $E\left[(y-\mu_y)^2\right]=\sigma_y^2=u_c^2(y)$ d'où finalement :

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{p}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r_{ij}$$

où

$u(x_i)$ = incertitude-type sur x_i

r_{ij} = coefficient de corrélation de x_i et x_j

Cette équation est appelée l**oi de propagation des incertitudes**. Elle montre comment se composent les incertitudes $u(x_i)$ des grandeurs d'entrée x_i pour donner l'incertitude $u_c(y)$ de la grandeur de sortie y.

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont appelées **coefficients de sensibilité**. Elles décrivent comment varie l'estimation de sortie y en fonction des variations dans les valeurs des estimations d'entrée $x_1, x_2, ... x_p$.

Le coefficient de corrélation r_{ij} est tel que $r_{ij}=\frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$ où $u(x_i,x_j)=E\left[(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)\right]$ est la covariance de x_i et x_j

a) Grandeurs d'entrée non corrélées

Lorsque toutes les grandeurs d'entrée $X_1, X_2, ..., X_p$ sont indépendantes, c'est à dire lorsque les covariance $u(x_i, x_j)$ et les coefficients de corrélation r_{ij} sont nuls, l'incertitude-type composée est telle que :

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{p}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2u^2(x_i)$$

i Cas où Y est une somme ou une différence

$$Y = A\,x_1 \pm B\,x_2 \text{ alors } u_c(Y)=\sqrt{[A\,u(x_1)]^2+[B\,u(x_2)]^2}$$

Exemple

Soit la grandeur distance L dépendant des grandeurs mesurées position, x_1 et position x_2 telles que $L=x_2-x_1$. Alors $u(L)=\sqrt{u^2(x_1)+u^2(x_2)}$. Si $u(x_1)=u(x_2)=u$ alors $u(L)=\sqrt{2}u$.

ii Cas où Y est un produit ou un quotient

$$Y = A\,\frac{x_1^a\,x_2^b}{x_3^c} \text{ alors } \frac{u_c(Y)}{Y}=\sqrt{[a\,\frac{u(x_1)}{x_1}]^2+[b\,\frac{u(x_2)}{x_2}]^2+[c\,\frac{u(x_3)}{x_3}]^2}$$

Exemple

Soit la grandeur éclairement E dépendant des grandeurs connues ou mesurées intensité I_L et distance D. La loi de Bouguer donne $E=\frac{I_L}{D^2}$ soit :

$$\frac{u(E)}{E}=\sqrt{[\frac{u(I_L)}{I_L}]^2+[2\,\frac{u(D)}{D}]^2}$$

b) Grandeurs d'entrée corrélées

Si on utilise dans l'estimation des valeurs de grandeurs d'entrée un même étalon physique, un même instrument de mesure, une même donnée de référence ou encore la même méthode de mesure, il existera une corrélation entre grandeurs d'entrée.

De façon générale, si deux grandeurs d'entrée X_1 et X_2 estimées par x_1 et x_2 dépendent d'un ensemble de variables non corrélées Q_1, Q_2, ..., Q_L telles que $X_1=F(Q_1,Q_2,\ldots,Q_L)$ et , $X_2=G(Q_1,Q_2,\ldots,Q_L)$ la covariance associée à x_1 et x_2 est donnée par :

$$u(x_1,x_2)=\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}u^2(q_l)$$

avec $u^2(q_l)$ la variance associée à l'estimation q_l de Q_l.

Le coefficient de corrélation estimé $r(x_1,x_2)$ est déterminé à partir de l'expression

$$r(x_1,x_2)=\frac{u(x_1,x_2)}{u(x_1)\,u(x_2)}$$

avec $u^2(x_1)=\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\right)^2 u^2(q_l)$ et une expression analogue pour $u^2(x_2)$.

Exemple

Dix résistances électriques, chacune de valeur nominale R_i=1000Ω sont étalonnées par comparaison à une même résistance étalon R_s=1000Ω caractérisée par une incertitude-type $u(R_s)$=100mΩ.

L'étalonnage de chaque résistance peut être représenté par le modèle mathématique $R_i = \alpha_i R_S$ avec l'incertitude-type $u(\alpha_i)$ sur le rapport mesuré α_i obtenue à partir d'observations répétées. On suppose que $\alpha_i \simeq 1$ pour chaque résistance et que $u(\alpha_i)$ est à peu près identique pour chaque étalonnage de sorte que $u(\alpha_i) \simeq u(\alpha)$.

Les dix résistances R_i dépendent toutes d'une même variable R_s du fait de leur étalonnage. La covariance associée à R_i et R_j est

$$u(R_i, R_j) = \frac{\partial R_i}{\partial R_S} \frac{\partial R_j}{\partial R_S} u^2(R_S) \simeq u^2(R_S)$$

et

$$u^2(R_i) = \left(\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_i}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial R_i}{\partial R_S}\right)^2 u^2(R_S)$$

soit

$$u^2(R_i) = R_S^2 u^2(\alpha) + u^2(R_S)$$

cela entraîne que le coefficient de corrélation de deux résistances quelconques (i≠j) est

$$r(R_i, R_j) = r_{ij} = \left[1 + \left(\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right)^2\right]^{-1}$$

Les valeurs estimées des résistances sont donc corrélées avec un degré de corrélation qui dépend du rapport entre l'incertitude de la comparaison $u(\alpha)$ et l'incertitude de l'étalon de référence $u(R_s)$. Lorsque l'incertitude de comparaison est négligeable par rapport à l'incertitude de l'étalon, les coefficients de corrélation r_{ij} sont égaux à +1 et l'incertitude de chaque résistance étalonnée $u(R_i)$ est la même que celle de l'étalon.

De même que la variance estimée associée à une grandeur d'entrée comporte une composante statistique (Type A) et une composante évaluée (Type B), la covariance estimée associée à deux grandeurs d'entrée peut aussi être composée de deux contributions de Type A et B. Ainsi la covariance estimée de deux grandeurs X et Z qui sont elles-mêmes estimées par les moyennes $\bar{X}$ *et* $\bar{Z}$ déterminées à partir de N paires (x_1,z_i) indépendantes d'observations simultanées répétées est donnée par $u(x, z) = s(\bar{x}, \bar{z})$ avec

$$s(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$$

Le coefficient de corrélation estimé entre les deux grandeurs X et Z est alors

$$r(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{s(\bar{x}, \bar{z})}{s(\bar{x})\, s(\bar{z})}$$

Exemple

Si la fréquence d'un oscillateur ne disposant pas de compensation de température est une grandeur d'entrée et que la température ambiante est aussi une grandeur d'entrée et que ces deux grandeurs sont observées simultanément, alors il peut y avoir une corrélation significative mise en évidence par la covariance calculée de la fréquence de l'oscillateur et de la température ambiante.

D. Détermination de l'incertitude élargie

Bien que l'incertitude-type composée $u_c(y)$ puisse convenir pour exprimer l'incertitude d'un résultat de mesure, il est pratiquement toujours nécessaire de donner une mesure de l'incertitude qui définisse, autour du résultat de mesure, un intervalle à l'intérieur duquel on puisse trouver une large fraction de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande.

D'une façon générale, les résultats de mesure se répartissent autour d'une valeur moyenne m correspondant à l'estimation la plus probable du mesurande. On peut définir un intervalle $[m-U\,;m+U]$ tel que la probabilité P que la valeur mesurée appartienne à cet intervalle est $P=1-\alpha$ où α est appelé seuil de confiance $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ et $1-\alpha$ niveau de confiance. On définit ainsi un **intervalle de confiance** de largeur $\pm$U autour de la valeur moyenne du mesurande. U s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée $u_c(y)$ par un **facteur d'élargissement** k tel que $U=k\,u_c(y)$ est appelé **incertitude élargie**.

1. Choix d'un facteur d'élargissement

Si les résultats de mesure se répartissent suivant une loi normale autour de la valeur moyenne m (cf. figure 1), les valeurs respectives du facteur d'élargissement k et du niveau de confiance $1-\alpha$ sont rassemblées dans le tableau 3.

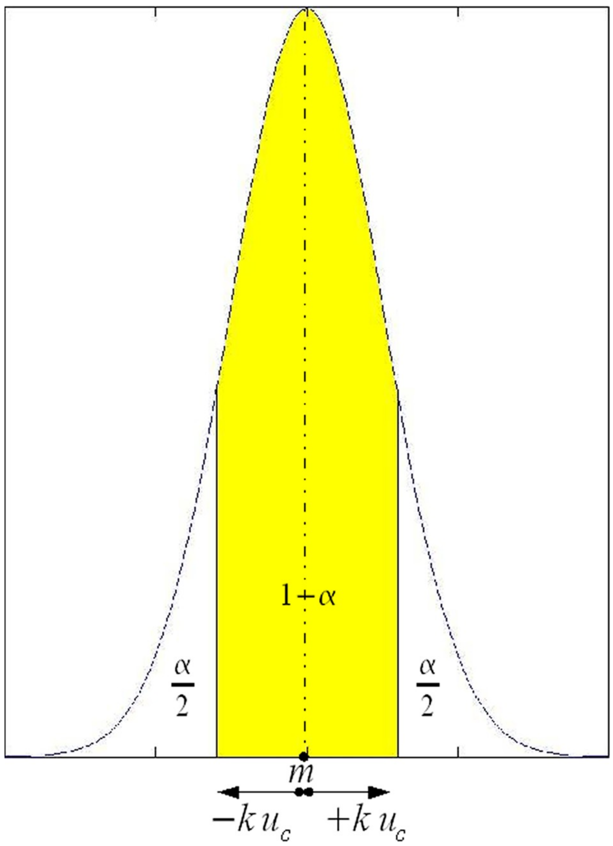


Figure 1 : Intervalle de confiance pour une loi normale

Facteur d'élargissement k	Niveau de confiance 1 - α
1	0,68
1,96	0,95
2	0,95
2,58	0,99
3	1

Tableau 3 : Valeurs usuelles du facteur d'élargissement

Ces valeurs ne sont rigoureusement valables que lorsque le nombre N de répétitions des mesures est important (typiquement N≥30). Dans la pratique, cela est rarement le cas, il faut alors utiliser **la loi de t** ou **loi de Student** que suit la variable $t=(\bar{x}-\mu_x)/s(\bar{x})$ *où* $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique de N observations indépendantes x_k de x et $s(\bar{x})=s(x)/\sqrt{N}$ l 'écart-type expérimental de la moyenne $\bar{x}$. Il est à noter que la loi de Student n'est valide que si la variable aléatoire x suit une loi normale d'espérance mathématique μ_x et d'écart-type σ .

En conséquence, si le mesurande Y est une grandeur unique X suivant une loi normale, telle que Y=X et si X est estimé par la moyenne $\bar{X}$ arithmétique de N observations répétées indépendantes X_k de X, avec un écart-type expérimental de la moyenne $s(\bar{X})$, alors $t=(\bar{x}-\mu_x)/s(\bar{x})=(\bar{X}-\mu_X)/s(\bar{X})=(y-Y)/u_c(y)$ est distribué selon la loi de student avec :

$$\text{Probabilité}\,[-t_{1-\alpha}(\nu)\leqslant t\leqslant t_{1-\alpha}(\nu)]=1-\alpha$$

c'est à dire

$$\text{Probabilité}\,[-t_{1-\alpha}(\nu)\leqslant(y-Y)/u_c(y)\leqslant t_{1-\alpha}(\nu)]=1-\alpha$$

ou encore

$$\text{Probabilité}\,[y-t_{1-\alpha}(\nu)\,u_c(y)\leqslant Y\leqslant y+t_{1-\alpha}(\nu)\,u_c(y)]=1-\alpha$$

Dans ces expressions, $t_{1-\alpha}(\nu)$ est la valeur de t pour une valeur donnée du paramètre ν (**nombre de degrés de liberté**) telle que l'intervalle $\left[-t_{1-\alpha}(\nu)u_c(y);t_{1-\alpha}(\nu)u_c(y)\right]$ est associé à un niveau de confiance $1-\alpha$. Autrement dit l'incertitude élargie est

$$U=t_{1-\alpha}(\nu)\,u_c(y)$$

2. Nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté ν est égal à $N-1$ dans le cas de la mesure directe d'une grandeur estimée par la moyenne arithmétique de N observations indépendantes. Si les N observations sont utilisées pour déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b d'une droite par la méthode des moindres carrés (cas d'une droite d'étalonnage telle que $Y=aX+b$), le nombre de degrés de liberté associé respectivement aux incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$ est $\nu=N-2$. Pour un ajustement par méthode des moindres carrés de p paramètres pour N données, le nombre de degrés de liberté de l'incertitude-type de chaque paramètre est $\nu=N-p$. Les différents cas énumérés ci-dessus sont rassemblés dans le tableau 4.

Degrés de liberté ν	Situation de mesure
$N-1$	N Mesures répétées
$N-2$	N Mesures répétées + droite d'étalonnage Y=a.X+b
$N-p$	N Mesures répétées + ajustement à p paramètres

Tableau 4 : Degrés de liberté et niveaux de confiance

Une sélection de valeurs de $t_{1-\alpha}(\nu)$ pour différentes valeurs du niveau de confiance $1-\alpha$ et du nombre de degrés de liberté ν est donnée dans le tableau 5.

Nbre de degrés de liberté ν	Niveau de confiance $1-\alpha$ en %					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
	Valeur de $t_{1-\alpha}(\nu)$					
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,8
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,01	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,00	1,645	1,96	2	2,576	3,00

Tableau 5

Lorsque ν → ∞, la loi de Student tend vers une loi normale et $t_{1-\alpha}(\nu) \simeq k\sqrt{1+\dfrac{2}{\nu}}$ où k est le facteur d'élargissement nécessaire pour obtenir un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour une variable distribuée normalement. Ainsi, dans le tableau 5 la valeur de $t_{1-\alpha}(\infty)$ pour un niveau de confiance donné $1-\alpha$ est égale à la valeur de k pour la même valeur de $1-\alpha$ dans le tableau 3. À partir de l'expression de $t_{1-\alpha}(\nu)$, on peut aussi évaluer le nombre de degrés de liberté ν_L pour lequel $t_{1-\alpha}(\nu_L)=1{,}1\times k$ permettant d'évaluer le nombre de mesures répétées $N_L=\nu_L+1$ au delà duquel la loi de Student est à moins de 10% d'une loi normale soit

$$1{,}1\times k = k\sqrt{1+\frac{2}{\nu_L}}$$

d'où

$$\nu_L = 9{,}53$$

soit

$$N_L \geqslant 10$$

Ainsi, il faut à priori au moins 10 mesures répétées pour approcher à 10% près une loi normale décrivant la répartition des valeurs de la grandeur mesurée autour de sa valeur moyenne.

La loi de Student ne décrit pas en général la loi de la variable $t=(y-Y)/u_c^2(y)$ si $u^2{}_c$ (y) est la somme de plusieurs composantes de variance estimées $u_i^2(y)=(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 u^2(x_i)=c_i^2 u^2(x_i)$ même si chaque x_i est l'estimation d'une grandeur d'entrée X_i normalement distribuée. Il est cependant possible d'utiliser la loi de Student avec un nombre effectif de degrés de liberté ν_{eff} obtenu par la formule de Welch-Satterthwaite ([3], [4], [5])

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{p} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

où ν_i est le nombre de degrés de liberté de chaque composante de l'incertitude-type composée $u_c(y)$ telle que $u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{p} u_i^2(y)=\sum_{i=1}^{p} c_i^2 u^2(x_i)$. Pour une composante obtenue par une évaluation de Type A, ν_i est associé au nombre d'observations répétées indépendantes de la grandeur d'entrée correspondante et au nombre de paramètres déterminés à partir de ces observations (cf. tableau 4). Pour une composante obtenue par une évaluation de Type B, ν_i est évalué à partir de la fiabilité que l'on peut attacher à la valeur de cette composante suivant l'expression

$$\nu_i \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$

où $\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$ est l'incertitude relative de $u(x_i)$. C'est une grandeur subjective dont la valeur s'obtient par un jugement scientifique fondé sur l'ensemble des informations disponibles. À noter que si $u(x_i)$ peut être considéré comme connu exactement alors $\nu_i \rightarrow \infty$.

E. Présentation des résultats de mesure

D'une façon générale, un résultat de mesure est constitué de 4 éléments :

- une valeur numérique correspondant à la valeur du mesurande éventuellement corrigée si une erreur de justesse a été constatée,
- une incertitude élargie associée à un intervalle de confiance,
- une unité de mesure garantissant la traçabilité avec le Système International (S.I.) d'unités,
- un facteur d'élargissement de l'incertitude-type.

L'expression du résultat de mesure a alors la forme suivante :

$$Y = y \pm U \text{ unités S.I.} \left(k = 2 \text{ ou valeur du facteur } t \right)$$

Par ailleurs, une question à se poser lorsqu'on exprime un résultat de mesure est la suivante :

«A-t-il été fourni suffisamment d'information pour que le résultat puisse être mis à jour ultérieurement si une information ou des données nouvelles devenaient disponibles ?»

Il vaut mieux un excès d'information plutôt qu'un défaut. Par exemple, on doit :

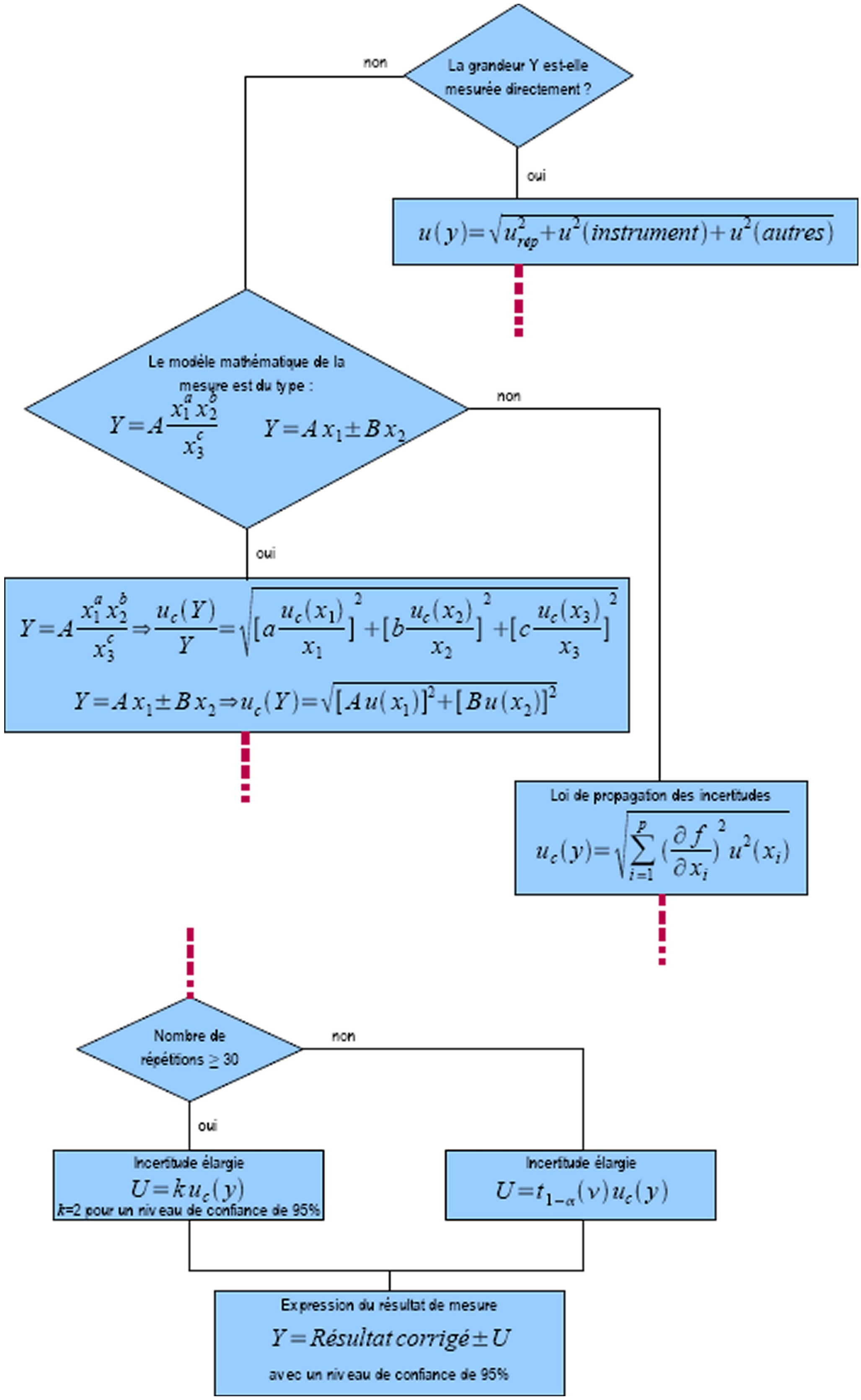
- décrire clairement les méthodes utilisées pour calculer le résultat de mesure et son incertitude à partir des observations expérimentales et des données d'entrée,
- faire la liste de toutes les composantes de l'incertitude et documenter complètement la manière dont elles ont été évaluées,
- présenter l'analyse des résultats de telle manière que chaque étape importante puisse être suivie facilement et que le calcul du résultat fourni puisse être refait si nécessaire,
- donner toutes les corrections et les constantes utilisées pour l'analyse ainsi que leurs sources.

Les valeurs numériques de l'estimation y et de son incertitude-type $u_c(y)$ ou de son incertitude élargie U ne doivent pas être données avec un nombre excessif de chiffres. Il suffit généralement de fournir $u_c(y)$ et U ainsi que les incertitudes-types $u(x_i)$ avec deux chiffres significatifs. Il peut être malgré tout nécessaire de retenir des chiffres supplémentaires pour les $u(x_i)$ afin d'éviter la propagation des erreurs d'arrondi dans les calculs intermédiaires. Le tableau ci-dessous résume les principes généraux à adopter dans l'affichage des valeurs numériques.

Règle à suivre	**Soit l'éclairement *E* affichée par un luxmètre** *E* = 100,23465 *lux* **avec** *u(E)*=0,104 *lux* **ou** *U(E)*=0,208 *lux*
1/ Nombre de chiffres significatifs de l'incertitude 2 chiffres arrondis au dernier chiffre supérieur	$u(E) = 0{,}11\ lux$ ou $U(E) = 0{,}21\ lux$
2/ Nombre de chiffres significatifs du résultat Les deux derniers chiffres significatifs du résultat correspondent aux deux chiffres significatifs de l'incertitude. Le résultat est arrondi à la valeur la plus proche.	$E = 100{,}23\,464\ lux$ $E = 100{,}23\ lux$
3/ Résultat final $Y = (\ldots \pm U(Y))$ *Incertitude élargie ;* *avec un niveau de confiance de 95%* Ne pas utiliser de puissance de 10	$E = 100{,}23 \pm 0{,}21\ lux\ (k = 2)$ $\cancel{E = 100{,}23 \pm 21 \cdot 10^{-2}\ lux\ (k = 2)}$
4/ Incertitude relative à mettre sous forme de pourcentage (uniquement valable si la grandeur est différente de zéro)	$\frac{u(E)}{E} = 0{,}11\ \%$ ou $\frac{U(E)}{E} = 0{,}21\ \%$

Tableau 6 : Règles d'écriture d'un résultat de mesure

F. Récapitulatif de la procédure d'évaluation de l'incertitude


La grandeur Y est-elle mesurée directement ?
non
oui
$u(y)=\sqrt{u_{rép}^2+u^2(instrument)+u^2(autres)}$
Le modèle mathématique de la mesure est du type :
$Y=A\frac{x_1^a x_2^b}{x_3^c}$ $Y=A x_1 \pm B x_2$
non
oui
$Y=A\frac{x_1^a x_2^b}{x_3^c} \Rightarrow \frac{u_c(Y)}{Y}=\sqrt{[a\frac{u_c(x_1)}{x_1}]^2+[b\frac{u_c(x_2)}{x_2}]^2+[c\frac{u_c(x_3)}{x_3}]^2}$
$Y=A x_1 \pm B x_2 \Rightarrow u_c(Y)=\sqrt{[A u(x_1)]^2+[B u(x_2)]^2}$
Loi de propagation des incertitudes
$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 u^2(x_i)}$
Nombre de répétitions ≥ 30
non
oui
Incertitude élargie
$U=k u_c(y)$
k=2 pour un niveau de confiance de 95%
Incertitude élargie
$U=t_{1-\alpha}(\nu) u_c(y)$
Expression du résultat de mesure
$Y=Résultat\ corrigé \pm U$
avec un niveau de confiance de 95%

* *

*

Pour plus d'informations, vous pouvez consulter la bibliographie ([6] [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]).

Etude de cas : Etalonnage d'un luxmètre

II

La méthode d'étalonnage [13] consiste à comparer la valeur d'un éclairement de référence à la valeur affichée sur le luxmètre en étalonnage.

Le dispositif utilisé pour l'étalonnage est illustré sur la figure 2.

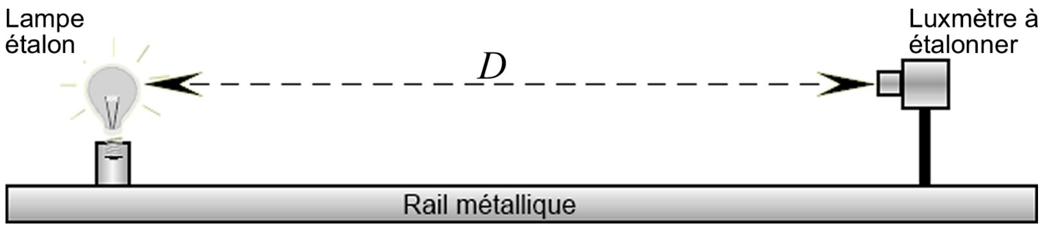


Figure 2 : Banc d'étalonnage de luxmètres

L'équipement requis est constitué :

- d'un rail métallique servant de support mécanique aux différents composants.
- d'une lampe étalon d'intensité lumineuse I_L connue.
- d'un luxmètre à étalonner.

Le dispositif produit un éclairement ajustable par la distance D séparant la lampe du luxmètre et spatialement uniforme sur la surface réceptrice du luxmètre.

A. Mode opératoire

L'opérateur monte la lampe étalon à une extrémité du banc. Le luxmètre est placé sur un support mobile capable de se déplacer sur le rail métallique. L'opérateur relève la distance D séparant la lampe et le luxmètre ainsi que la valeur de l'éclairement E_{LU} indiqué par le luxmètre. La variation du niveau d'éclairement est obtenue par variation de la distance D. L'opération est répétée 5 fois.

Dans un premier temps, on évalue l'incertitude sur l'éclairement de référence E. Cet éclairement est déterminé en appliquant la loi de Bouguer. Pour une source considérée comme ponctuelle d'intensité I_L située à la distance D du luxmètre, on a :

$$E = \frac{I_L}{D^2}$$

B. Incertitude sur la référence

En utilisant la loi de propagation des incertitudes, exprimer l'incertitude-type relative u(E)/E en fonction de $u(I_L)/I_L$ et u(D)/D.

Le modèle de la mesure est $E = \frac{I_L}{D^2} = f\,(I_L\,,\,D)$. C'est un modèle produit-quotient, on a donc :

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(I_L)}{I_L}\right]^2 + 4\left[\frac{u(D)}{D}\right]^2}$$

Pour déterminer l'incertitude type relative $u(I_L)/I_L$ sur l'intensité lumineuse rayonnée par la lampe étalon, on prend en compte les informations contenues dans son certificat d'étalonnage.

La lampe étalon est étalonnée avec une incertitude relative élargie de 1% (k=2). En déduire la valeur de l'incertitude type relative associée $u_1(I_L)/I_L$.

D'après le facteur d'élargissement (k=2), on a :

$$\frac{u_1(I_L)}{I_L} = 0{,}5\ \%$$

La lampe étalon présente une dérive d'étendue totale 0,3% entre 2 étalonnages successifs. Appliquant une loi de probabilité uniforme, calculer l'incertitude type relative $u_2(I_L)/I_L$ associée à cette dérive.

Sans autre information supplémentaire, on considère que la dérive temporelle est associée à une probabilité uniforme sur l'intervalle de temps entre 2 étalonnages successifs. On a donc :

$$\frac{u_2(I_L)}{I_L} = \frac{0{,}3\ \%}{2\sqrt{3}} = 0{,}087\ \%$$

La variation de l'intensité lumineuse I_L avec le courant d'alimentation i ne suit pas une loi linéaire. On a :

$$\frac{\Delta I_L}{I_L} = 6{,}5 \times \frac{\Delta i}{i}$$

L'ampèremètre utilisé pour mesurer le courant traversant la lampe est étalonné avec une incertitude relative élargie de 0,05% (k=2). En déduire la valeur de l'incertitude type relative associée $u_3(I_L)/I_L$.

Pour $\Delta i = u(i)$ incertitude type sur le courant "i", on a $\Delta I_L = u_3(I_L)$ d'où :

$$\frac{u_3(I_L)}{I_L} = 6{,}5\,\frac{u(i)}{i}$$

L'ampèremètre est tel que $\frac{u(i)}{i} = \frac{0{,}05 \times 10^{-2}}{2} = 2{,}5 \times 10^{-4}$ d'où :

$$\frac{u_3(I_L)}{I_L} = 0{,}16\ \%$$

Des résultats obtenus précédemment, déduire la valeur de l'incertitude type combinée relative $u(I_L)/I_L$.

$$\frac{u(I_L)}{I_L} = \sqrt{\left[\frac{u_1(I_L)}{I_L}\right]^2 + \left[\frac{u_2(I_L)}{I_L}\right]^2 + \left[\frac{u_3(I_L)}{I_L}\right]^2}$$

soit

$$\frac{u(I_L)}{I_L} = 0{,}53\ \% = 5{,}3 \times 10^{-3}$$

La mesure de la distance D est de 3m avec un intervalle de variation estimé à ±5mm. En déduire la valeur de l'incertitude relative u(D)/D .

$$u(D) = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}88\ mm$$

$$\frac{u(D)}{D} = \frac{2{,}88 \times 10^{-3}}{3} = 0{,}1\ \% = 10^{-3}$$

A partir des calculs précédents, donner la valeur de l'incertitude type $u_{réf}(E)$ pour un éclairement de référence égal à 100 lux.

$$\frac{u_{réf}(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(I_L)}{I_L}\right]^2 + 4\left[\frac{u(D)}{D}\right]^2}$$

avec $\frac{u(I_L)}{I_L} = 5{,}3 \times 10^{-3}$ et $\frac{u(D)}{D} = 10^{-3}$ d'où

$$\frac{u_{réf}(E)}{E} = 5{,}33 \times 10^{-3}$$

Soit pour E=100 lux, $u_{réf}(E)$=0,53 lux.

C. Incertitudes associées aux conditions de mesure

Après avoir traité l'incertitude sur la référence, on évalue ci-après l'incertitude associée aux mesurages et au luxomètre.

L'éclairement E_{LU} mesuré avec le luxmètre à étalonner peut être modélisé par :

$$E_{LU} = \bar{x} + C_{référence} + C_{résolution}$$

où

$\bar{x}$	= moyenne de 5 mesures répétées d'éclairement
$C_{référence}$	= Correction associée à la référence
$C_{résolution}$	= Correction associée à la résolution du luxmètre

La série de 5 mesurages dans les mêmes conditions a donné les résultats suivants :

N	1	2	3	4	5
E_{LU}	101	102	99	98	101

En déduire les valeurs de $\bar{x}$ et de l'écart-type estimé $s(\bar{x}) = u_{rép}$

$$\bar{x} = 100{,}2\ lux$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{5-1}\sum_{k=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2} = 1{,}643\ lux$$

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{5}} = u_{rép} = 0{,}735\ lux$$

Sachant que la résolution du luxmètre est de 0,5 lux pour une valeur lue de 100 lux, en déduire l'incertitude type correspondante $u_{rés}$.

$$u_{rés} = \frac{0{,}5}{2\sqrt{3}} = 0{,}144\ lux$$

De toutes les questions précédentes, déduire la valeur de l'incertitude combinée $u_c(E_{LU})$.

Le modèle de la mesure est $E_{LU} = \bar{x} + C_{référence} + C_{résolution}$. Même si les corrections sont nulles, les incertitudes associées ne le sont pas. On a donc :

$$u_c^2(E_{LU}) = u_{rép}^2 + u_{réf}^2(E) + u_{rés}^2$$
$$u_c(E_{LU}) = \sqrt{u_{rép}^2 + u_{réf}^2(E) + u_{rés}^2}$$
$$u_c(E_{LU}) = \sqrt{(0{,}735)^2 + (0{,}53)^2 + (0{,}144)^2}$$

soit

$$u_c(E_{LU}) = 0{,}92\ lux$$

Exprimer le résultat de mesure de l'éclairement sous la forme normalisée en justifiant notamment le choix de la valeur de la constante d'élargissement.

On considère que les incertitudes-types $u_{réf}$ et $u_{rés}$ sont connues exactement, il n'y a donc pas de degrés de liberté ν_i qui leur sont associés. Dans ces conditions, le nombre de degrés de liberté associé à $u_c(E_{LU})$ est ν=5–1=4 qui correspond à un facteur t=2,78 (cf. tableau 5) au niveau de confiance $1-\alpha = 0{,}95$ d'où

$$E_{LU} = 100{,}20 \pm 2{,}55\ lux$$

Exercice

III

A. Exercice " Incertitudes de mesures "

On souhaite déterminer la largeur "a"d'une fente diffractante à partir de la figure de diffraction observée sur un écran placé à une distance "D" de la fente, elle-même éclairée par une source laser de longueur d'onde λ (cf. figure 3).

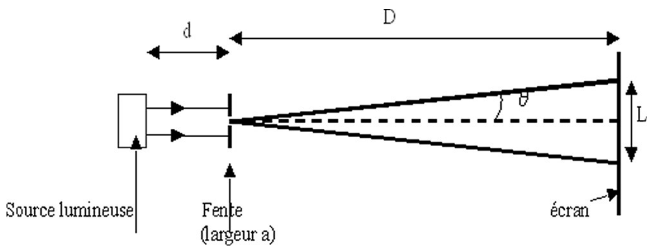


figure 3 : Situation expérimentale de mesure de la largeur "a" de la fente

Question 1

[*Solution n°1 p 29*]

Rappeler l'expression de l'éclairement I(θ) sur l'écran pour une fente considérée de longueur quasi infinie par rapport à sa largeur "a" ?

Question 2

[*Solution n°2 p 29*]

Exprimer l'angle θ en fonction de la distance fente-écran D et de la largeur L du lobe central de diffraction mesurée sur l'écran.

Trouver une autre expression de θ à partir du diamètre apparent de la tâche centrale de diffraction déduite de I(θ).

Déduire des deux expressions de θ ainsi établies, la relation entre la largeur de fente a et les grandeurs L, D et λ .

Question 3

[*Solution n°3 p 29*]

À l'aide de la loi de propagation des incertitudes, exprimer l'incertitude-type u(a).

Question 4

[*Solution n°4 p 30*]

La distance fente-écran **D** est mesurée 5 fois de suite avec un mètre ruban de résolution 1mm. Les valeurs relevées sont les suivantes :

n° mesure	1	2	3	4	5
Valeur mesurée (m)	2,01	2	2,03	2,02	2,01

Calculer u(D).

Question 5

[Solution n°5 p 30]

La largeur L de la tâche de diffraction est mesurée 5 fois de suite avec un réglet de résolution 0,5mm. Les valeurs relevées sont les suivantes :

n° mesure	1	2	3	4	5
Valeur mesurée (mm)	25	26,5	27	23,5	24

Calculer u(L).

Question 6

[Solution n°6 p 30]

Calculer a et u(a) en faisant l'hypothèse que la longueur d'onde λ de la source lumineuse (λ=633nm) ne comporte pas d'incertitude.

Question 7

[Solution n°7 p 31]

Calculer l'incertitude élargie U(a) puis exprimer le résultat de mesure de la largeur a.

Solution des exercices de TD

> Solution n°1 *(exercice p. 27)*

Dans l'approximation de Fraunhofer, l'éclairement du au rayonnement diffracté par la fente de largeur "a" a pour expression :

$$I(\theta)=I_0\frac{\left(\sin\frac{\pi\,\theta\,a}{\lambda}\right)^2}{\left(\frac{\pi\,\theta\,a}{\lambda}\right)^2}$$

> Solution n°2 *(exercice p. 27)*

En pratique les angles θ sont de faibles valeurs, on a donc $\tan(\theta)\approx\theta$.

Comme d'une part $\tan(\theta)=\frac{L}{2\mathrm{D}}\approx\theta$ et que le demi diamètre apparent est $\theta=\frac{\lambda}{a}$, on en déduit que $\frac{L}{2\mathrm{D}}=\frac{\lambda}{a}$ d'où

$$a=\frac{2\mathrm{D}\,\lambda}{L}$$

À partir de la mesure de D et L, connaissant λ, il est alors possible de déterminer la largeur de fente a.

> Solution n°3 *(exercice p. 27)*

Le modèle $a=f(\lambda,D,L)$ est un modèle produit-quotient, on a donc

$$\frac{u^2(a)}{a^2}=\frac{u^2(\lambda)}{\lambda^2}+\frac{u^2(D)}{D^2}+\frac{u^2(L)}{L^2}$$

ou

$$u^2(a)=\left(\frac{2\mathrm{D}}{L}\right)^2u^2(\lambda)+\left(\frac{2\lambda}{L}\right)^2u^2(D)+\left(\frac{2\mathrm{D}\lambda}{L^2}\right)^2u^2(L)$$

> Solution n°4 (exercice p. 27)

On a $u(D)=\sqrt{u_{rép}^2+u_{rés}^2}$ avec $u_{rép}=\frac{\sigma(D)}{\sqrt{5}}$ et $u_{rés}=\frac{\delta_D}{6}$

où

$\sigma(D)$ est l'écart-type des valeurs mesurées de D.

δ_D est la résolution de l'instrument de mesure (loi de probabilité gaussienne sur l'intervalle [-0,5mm; +0,5mm])

ce qui donne

$$u_{rép}=\frac{0{,}0114}{\sqrt{5}}=0{,}51\,cm \quad \text{et} \quad u_{rés}=\frac{0{,}1}{6}=0{,}017\,cm$$

soit

$$u(D)=0{,}51\,cm$$

> Solution n°5 (exercice p. 28)

On a $u(L)=\sqrt{u_{rép}^2+u_{rés}^2}$ avec $u_{rép}=\frac{\sigma(L)}{\sqrt{5}}$ et $u_{rés}=\frac{\delta_L}{6}$

où

$\sigma(L)$ est l'écart-type des valeurs mesurées de L.

δ_L est la résolution de l'instrument de mesure (loi de probabilité gaussienne sur l'intervalle [-0,25mm; +0,25mm])

où

$\sigma(L)$ est l'écart-type des valeurs mesurées de L.

δ_L est la résolution de l'instrument de mesure (loi de probabilité gaussienne sur l'intervalle [-0,25mm; +0,25mm])

ce qui donne

$$u_{rép}=\frac{1{,}525}{\sqrt{5}}=0{,}68\,mm \quad \text{et} \quad u_{rés}=\frac{0{,}5}{6}=0{,}083\,mm$$

soit

$$u(L)=0{,}685\,mm$$

> Solution n°6 (exercice p. 28)

Les valeurs les plus probables des grandeurs D et L sont leurs valeurs moyennes calculées à partir des séries de 5 mesures répétées, soit

$$\bar{D}=2{,}014\,m$$

$$\bar{L}=25{,}2\,mm$$

d'où $a=\frac{2\bar{D}\lambda}{\bar{L}}=101{,}18\,\mu m$

Par ailleurs, $\frac{u(a)}{a}=\sqrt{\frac{u^2(D)}{\bar{D}^2}+\frac{u^2(L)}{\bar{L}^2}}$ soit $\frac{u(a)}{a}=\sqrt{0{,}00253^2+0{,}0271^2}=0{,}0273$

Finalement

$$u(a)=2{,}8\,\mu\, m$$

> Solution n°7 *(exercice p. 28)*

Le facteur d'élargissement t_v tel que $U(a)=t_v\times u(a)$ est déterminé à partir de la loi de Student pour v=4 degrés de liberté (5 mesures répétées) soit t_v=2,78 pour un niveau de confiance de 95%.

On a alors U(a)=7,8µm.

Finalement le résultat de la mesure de la largeur a est :

$$a=101\pm 8\,\mu\, m\,(k=2{,}78)$$

Bibliographie

[1] Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

AFNOR X 07 020 Norme, Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, *août*, -, 1999.

[2] Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie ;

AFNOR X 07 001 Norme, Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie ;, *décembre*, -, 1994.

[3] Publication revue

WELCH B.L., Publication revue (p.29-48), J. R.Stat. Soc., 1938--, n° Suppl. 3, .

[4] Publication revue

WELCH B.L., Publication revue (p.350-362), Biometrika, 1947--, n° 29, .

[5] Publication revue

SATTERTHWHAITE F.E., Publication revue (p.309-316), Psychometrika, 1946--, n° 6, .

[6] Mesure physique et instrumentation (analyse statistique et spectrale des mesures, capteurs) [ISBN 2-7298-1426-4]

BARCHIESI D., Mesure physique et instrumentation (analyse statistique et spectrale des mesures, capteurs) [ISBN 2-7298-1426-4], *éd. Ellipses TechnoSup*, -, 2003.

[7] Modélisation et estimation des erreurs de mesure [ISBN 2-85206-874-5]

NEUILLY M., CETAMA -, Modélisation et estimation des erreurs de mesure [ISBN 2-85206-874-5], *éd. Lavoisier Technique & Documentation*, -, 1993 ; 1996.

[8] Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques [ISBN 2-10-004307-2]

TAYLOR J., Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques [ISBN 2-10-004307-2], *éd. Dunod*, -, 2000.

[9]

http://www.boutique.afnor.org (consultation - Janvier 2007).

[10]

http://www.lne.fr (consultation - Janvier 2007).

[11]

http://www.cfmetrologie.com/ (consultation - Janvier 2007).

[12]

http://www.iso.org (consultation - Janvier 2007).

[13] 27 exemples d'évaluation d'incertitudes d'étalonnage [ISBN 2-909430-85-5]

Ouvrage collectif, 27 exemples d'évaluation d'incertitudes d'étalonnage [ISBN 2-909430-85-5], *éd. Mouvement*

Français pour la Qualité, -, 1999.