



Métrologie optique

Analyse de Fourier fractionnaire pour la description d'impulsions lumineuses

MARC BRUNEL

Table des matières

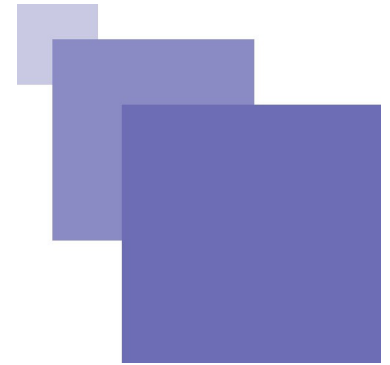


Table des matières	3
I - Cours	5
A. Propagation d'ondes lumineuses dans un milieu dispersif et formalisme de Fourier fractionnaire.....	5
1. Transformée de Fourier fractionnaire.....	5
2. Equation de propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu linéairement dispersif.....	6
3. Résolution sous forme d'une transformation de Fourier fractionnaire.....	6
4. Exemple.....	8
5. Propagation de faisceau partiellement cohérent dans un milieu linéairement dispersif.....	10
B. Caractérisation d'impulsions lumineuses ultracourtes par analyse de Fourier fractionnaire.....	12
1. Caractérisation d'un signal simple.....	12
2. Caractérisation de 2 impulsions temporellement superposées, mais présentant des dérivées de fréquences linéaires différentes.....	14
3. Techniques de décomposition en séries de Fourier fractionnaire.....	14
4. Un exemple expérimental : l'analyse de signaux SPIRIT.....	17
Bibliographie	21

Cours



Propagation d'ondes lumineuses dans un milieu dispersif et formalisme de Fourier fractionnaire	5
Caractérisation d'impulsions lumineuses ultracourtes par analyse de Fourier fractionnaire	12

Dans de précédents chapitres, S. Coëtmellec a détaillé les propriétés de la transformée de Fourier fractionnaire [[1](#)] [[2](#)] [[3](#)] [[4](#)], les techniques pour réaliser son implémentation numérique, puis ses applications en holographie numérique. Un hologramme d'un objet est obtenu à partir de la figure de diffraction donnée par cet objet quand il est éclairé avec une onde cohérente. La reconstruction numérique de l'hologramme par transformée de Fourier fractionnaire tient au fait que la transformée de Fourier fractionnaire agit comme une "refocalisation" sur l'objet qui permet d'en retracer les contours avec précision. Cette propriété vient de ce que la transformée de Fourier fractionnaire peut être vue comme une intégrale de Fresnel qui décrit parfaitement la propagation d'ondes lumineuses lors d'un processus de diffraction [[5](#)]. L'isomorphisme entre optique spatiale et optique temporelle est bien connu. Ainsi la même équation décrit soit la diffraction d'une onde en espace libre (processus spatial), soit la propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu linéairement dispersif (processus temporel). Il suffit juste de remplacer le terme de diffraction par un terme de dispersion, et la coordonnée spatiale transverse par le temps. Si la transformée de Fourier fractionnaire est un outil d'analyse pour des figures de diffraction, on se doute qu'elle peut également en être un pour la description de phénomènes de dispersion chromatique [[6](#)]. Plus spécifiquement, elle doit également pouvoir être un outil pour la description des phénomènes qu'induit de la dispersion : à savoir l'apparition de dérives de la fréquence à l'intérieur d'une impulsion lumineuse. On touche alors à un domaine très différent de celui de l'holographie numérique : celui de la caractérisation d'impulsions ultracourtes [[7](#)]. Le but de ce chapitre est de montrer le potentiel de l'analyse de Fourier fractionnaire pour la description de la propagation d'impulsions lumineuses dans des milieux dispersifs (Propagation d'ondes lumineuses dans un milieu dispersif et formalisme de Fourier fractionnaire), et la caractérisation d'impulsions lumineuses ultracourtes (Caractérisation d'impulsions lumineuses ultracourtes par analyse de Fourier fractionnaire).

A. Propagation d'ondes lumineuses dans un milieu dispersif et formalisme de Fourier fractionnaire

1. Transformée de Fourier fractionnaire

Soit $U(T)$ une fonction dépendant du temps T . La transformée de Fourier fractionnaire $\mathcal{F}_a[U(T)](T_a)$ sera définie de la manière suivante [[2](#)] :

$$\mathcal{F}_a[U(T)](T_a) = C(a) \exp\left(i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} T_a^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} U(T) \exp\left(i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} T^2\right) \exp\left(-i 2\pi \frac{T_a T}{\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)}\right) dT$$

où

$$C(a) = \frac{\exp(-i(\pi/4 \operatorname{sign}(\sin(a\pi/2))) - a\pi/4)}{|\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)|^{1/2}}$$

$C(a)$ assure la conservation de l'énergie dans le domaine fractionnaire, a est l'ordre fractionnaire satisfaisant $0 < a < 2$, T_a est la variable conjuguée de T dans le domaine fractionnaire et ε est un paramètre qui a la dimension du temps T . Dans la pratique, ce paramètre est choisi en début d'analyse pour s'adapter aux ordres de grandeur des données rencontrées dans l'analyse menée.



Remarque

La transformée de Fourier fractionnaire est un opérateur dont les fonctions propres sont des fonctions à dérive de fréquence linéaire.

2. Equation de propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu linéairement dispersif

Dans le régime où la dispersion domine (pas d'effets non-linéaires en particulier), la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu linéairement dispersif (par exemple une fibre optique ou un verre) est décrite par l'équation de propagation suivante [8] :

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}$$

Dans notre notation, $U(z, T)$ est l'amplitude normalisée

$$U(z, T) = \frac{1}{\sqrt{P_0}} e^{\frac{\alpha z}{2}} A(z, T)$$

où $A(z, T)$ est l'amplitude lentement variable de l'enveloppe de l'impulsion lumineuse, P_0 est la puissance crête de l'impulsion, α représente le coefficient d'absorption linéaire du milieu dispersif et β_2 le paramètre de dispersion qui s'exprime en $ps^2 m^{-1}$. Le temps T est exprimé dans le référentiel se propageant à la vitesse de groupe de l'impulsion de telle sorte que $T = t - z/v_g$, où t est le temps réel et z l'axe de propagation.



Remarque

Cette équation décrit par exemple la propagation d'impulsions lumineuses dont la puissance crête demeure peu intense, dans une fibre optique.

3. Résolution sous forme d'une transformation de Fourier fractionnaire

Notons $\tilde{U}(z, T_a)$ la transformée de Fourier classique de $U(z, T)$. De manière générale, il s'agit de la

transformée de Fourier fractionnaire d'ordre 1 de $U(z, T)$. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\tilde{U}(z, T_a) = \mathcal{F}_1[U(z, T)](z, T_a)$$

L'équation de propagation

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}$$

devient dans le domaine de Fourier classique :

$$i \frac{\partial \tilde{U}(z, T_a)}{\partial z} = \left(i 2 \pi \frac{T_a}{\varepsilon^2} \right)^2 \frac{1}{2} \beta_2 \tilde{U}(z, T_a)$$

dont la solution est donnée par :

$$\tilde{U}(z, T_a) = \tilde{U}(0, T_a) \exp \left(i 2 \pi^2 \frac{\beta_2 z}{\varepsilon^4} T_a^2 \right)$$

où $\tilde{U}(0, T_a)$ est la transformée de Fourier classique de l'amplitude du champ à l'entrée du milieu dispersif (en $z=0$), donnée par : $\tilde{U}(0, T_a) = \mathcal{F}_1[U(0, T)](0, T_a)$.

Comme $U(z, T)$ est la transformée de Fourier inverse de $\tilde{U}(z, T_a)$, nous obtenons la solution générale :

$$U(z, T) = \mathcal{F}_-^{-1} \left[\tilde{U}(0, T_a) \exp \left(i 2 \pi^2 \frac{\beta_2 z}{\varepsilon^4} T_a^2 \right) \right]$$

qui s'écrit encore :

$$U(z, T) = C(-\pi/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, T_a) \exp \left(i 2 \pi^2 \frac{\beta_2 z}{\varepsilon^4} T_a^2 \right) \exp \left(\frac{i 2 \pi T T_a}{\varepsilon^2} \right) dT_a$$

Définissons

$$\frac{1}{\tan(a\pi/2)} = 2\pi \frac{\beta_2 z}{\varepsilon^2}$$

et définissons la nouvelle variable s selon :

$$\frac{s}{\sin(a\pi/2)} = \frac{T}{\sin(-\pi/2)}$$

L'équation précédente devient alors

$$\hat{U}(z, s) = C(-\pi/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, T_a) \exp \left(i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} T_a^2 \right) \exp \left(-i \frac{2\pi s T_a}{\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)} \right) dT_a$$

où

$$\hat{U}(z, s) = U\left(z, s \frac{\sin(-\pi/2)}{\sin(a\pi/2)}\right)$$

On voit donc apparaître une transformation de Fourier fractionnaire et en utilisant la loi de composition de la transformée de Fourier fractionnaire, on obtient directement :

$$\hat{U}(z, s) = \frac{C(-\pi/2)}{C(a\pi/2)} \exp\left(i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} s^2\right) \mathcal{F}_{a+1}[U(0, T)](s)$$



Attention

L'amplitude de l'impulsion peut être déterminée à tout moment à l'aide d'une transformée de Fourier fractionnaire de l'impulsion incidente [9]. L'ordre fractionnaire nécessaire est directement relié à la distance parcourue dans le milieu dispersif, à savoir : $\beta = a + 1$ avec :

$$a = \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\pi\beta_2 z}\right)$$

4. Exemple

A titre d'exemple, considérons une impulsion temporellement gaussienne. L'amplitude de son champ électrique peut s'écrire :

$$U(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \exp\left(-\frac{iCT^2}{2T_0^2}\right)$$

où T_0 est la durée de l'impulsion à $1/e$. Le paramètre C contrôle la dérive de fréquence initiale de l'impulsion. La figure 1 montre l'ordre de la transformation nécessaire en fonction de la distance parcourue dans le milieu dispersif. Nous pouvons observer que la courbe est une fonction monotone : il n'y a donc pas d'ambiguïté concernant la distance parcourue par rapport à l'ordre de la transformation appliqué.

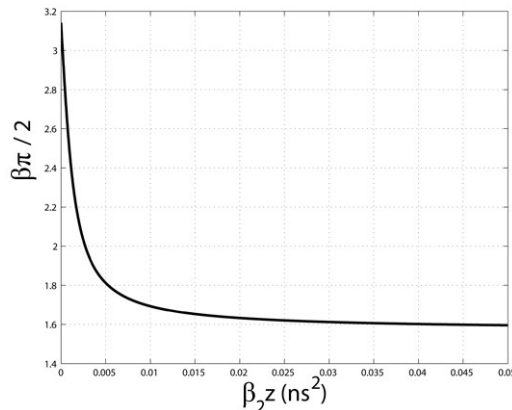


Figure 1 : Ordre fractionnaire en fonction de la distance parcourue

La figure 2 montre ensuite l'allure de l'impulsion à l'entrée du milieu dispersif (profil gaussien, courbe (i)) puis après une distance de parcours dans le milieu z vérifiant : $z/L_D = 2$ ou 4 (courbes (ii) et (iii) respectivement). La distance L_D est la longueur de dispersion définie par $L_D = T_0^2/|\beta_2|$. Ces courbes ont été tracées en utilisant le calcul fractionnaire. Les ordres fractionnaires qui correspondent aux distances de

propagation $z/L_D=2$ et $z/L_D=4$ sont $\beta=1.897$ et $\beta=1.802$ respectivement. La durée de l'impulsion incidente dans ce cas est $T_0=10\text{ps}$, et l'impulsion incidente ne possède pas de dérive de fréquence initiale : $C = 0$. On observe un élargissement progressif de l'impulsion et les résultats sont en parfait accord avec des méthodes de calcul conventionnelles.



Remarque

Pour une impulsion gaussienne, l'amplitude s'exprime dans ce cas particulier sous forme analytique, ce qui facilite la comparaison avec les résultats obtenus par transformée de Fourier fractionnaire et présentés ici.

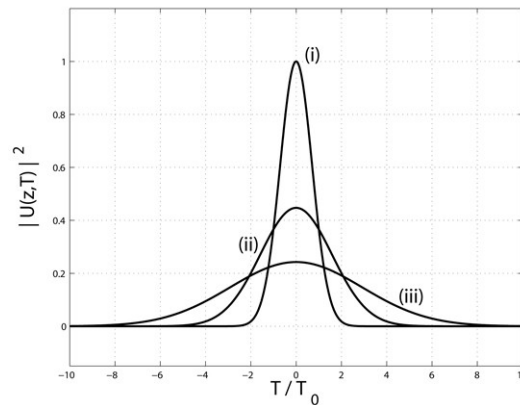


Figure 2 : Elargissement d'une impulsion lumineuse sous l'effet de dispersion

Considérons maintenant une impulsion possédant une dérive de fréquence initiale $C=-1$. Il est bien connu dans ce cas que la dispersion mène à une compression de l'impulsion dans la première partie du milieu dispersif puis à son étirement dans la seconde (pour $\beta_2 > 0$). La figure 3 illustre le taux de compression T_1/T_0 observé durant la propagation (T_1 est la durée de l'impulsion après propagation dans le milieu dispersif) en fonction de l'ordre fractionnaire appliqué. La compression est optimale pour un ordre β_{opt} donné de manière rigoureuse par la relation :

$$\beta_{opt} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \left[\frac{2\pi C T_0^2}{1+C^2 \varepsilon^2} \right]$$

où arccot est la fonction inverse de la fonction cotangente. Dans le cas présent, nous obtenons $\beta_{opt} = 1.974$ ce qui correspond à une propagation dans le milieu dispersif (la fibre optique) sur une distance z telle que $\beta_2 z = 5.10^{-5} \text{ns}^2$. Une fois encore, cette relation est en accord avec des méthodes de calcul classiques [9].

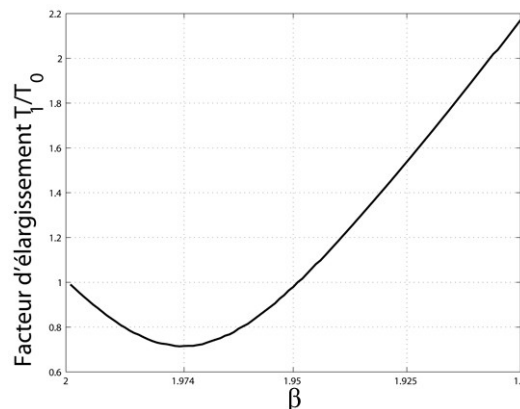


Figure 3 : Compression d'une impulsion initialement chirpée

5. Propagation de faisceau partiellement cohérent dans un milieu linéairement dispersif

Nous allons voir dans cette section que le formalisme de Fourier fractionnaire s'applique également très bien pour décrire la propagation de faisceaux partiellement cohérents dans un milieu dispersif. De tels faisceaux sont décrits via des outils statistiques, en particulier par leur fonction de corrélation du second ordre $\Gamma(z_1, z_2, T_1, T_2)$ définie par :

$$\Gamma(z_1, z_2, T_1, T_2) = \langle U^*(z_1, T_1) U(z_2, T_2) \rangle$$

où $U(z, T)$ représente l'amplitude du champ électrique en z à l'instant T , $*$ dénote le complexe conjugué, et $\langle \rangle$ représente la moyenne sur les différentes réalisations du champ.

A partir de l'équation de propagation dans un milieu dispersif :

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}$$

on montre que la propagation de la fonction de corrélation suit les deux équations suivantes :

$$-i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}(z_1, z_2, T_1, T_2) = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial T_1^2}(z_1, z_2, T_1, T_2)$$

$$i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_2}(z_1, z_2, T_1, T_2) = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial T_2^2}(z_1, z_2, T_1, T_2)$$

Notons :

$$\frac{1}{\tan(a_1 \pi/2)} = -2\pi \frac{\beta_2 z_1}{\varepsilon^2}$$

et

$$\frac{1}{\tan(a_2 \pi/2)} = 2\pi \frac{\beta_2 z_2}{\varepsilon^2}$$

et définissons les 2 nouvelles variables s_1 et s_2 par les transformations d'échelles suivantes :

$$s_1 = T_1 \frac{\sin(a_1 \pi/2)}{\sin(-\pi/2)}$$

et

$$s_2 = T_2 \frac{\sin(a_2 \pi/2)}{\sin(-\pi/2)}$$

puis la fonction normalisée :

$$\hat{\Gamma}(z_1, z_2, s_1, s_2) = \Gamma\left(z_1, z_2, s_1 \frac{\sin(-\pi/2)}{\sin(a_1\pi/2)}, s_2 \frac{\sin(-\pi/2)}{\sin(a_2\pi/2)}\right)$$

Alors on peut écrire :

$$\hat{\Gamma}(z_1, z_2, s_1, s_2) = \frac{C(-\pi/2)^2}{C(a_1\pi/2)C(a_2\pi/2)} \exp\left(-i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a_1\pi/2)} s_1^2\right) \exp\left(-i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a_2\pi/2)} s_2^2\right) \mathcal{F}_{a_1+1, a_2+1}[\Gamma(0,0, T_1, T_2)](s_1, s_2)$$



Attention

La fonction de corrélation peut être déterminée par une simple transformée de Fourier fractionnaire bidimensionnelle, dont les ordres sont reliés de manière simple à la distance parcourue dans le milieu dispersif [10].



Exemple

Considérons des impulsions partiellement cohérentes décrites par un modèle de Gauss-Schell. La fonction de corrélation du second ordre à l'entrée du milieu dispersif peut alors s'écrire :

$$\Gamma(0,0, T_1, T_2) = G_0 \exp(-(T_1^2 + T_2^2)/2\tau^2) \cdot \exp(-(T_1 - T_2)^2/4\tau_c^2)$$

Dans ce modèle, τ représente la durée des impulsions pendant que τ_c représente la "longueur de corrélation" à l'intérieur d'une impulsion. Nous prendrons ici $\tau = 10\text{ps}$ et $\tau_c = 3\text{ps}$. La figure 4 présente $\Gamma(0,0, T_1, T_2)$ dans le plan (T_1, T_2) . La figure 5 présente alors $\Gamma(z, z, T_1, T_2)$ dans ce même plan après une propagation z telle que $\beta_2 z = 50\text{ps}^2$. Cette figure fait apparaître tant un élargissement des durées d'impulsion que de la longueur de corrélation. Dans ce cas, elle a été tracée à partir du formalisme fractionnaire. Il est en parfait accord avec un calcul classique [10].

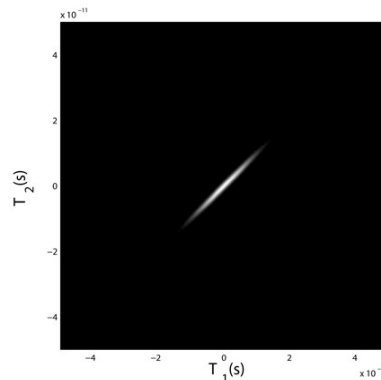


Figure 4 : Fonction de corrélation d'ordre 2

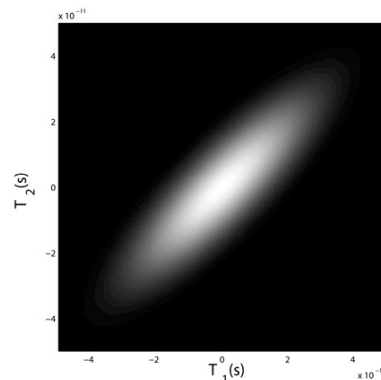


Figure 5 : Fonction de corrélation d'ordre 2 après propagation

B. Caractérisation d'impulsions lumineuses ultracourtes par analyse de Fourier fractionnaire

Depuis les années 80, l'utilisation de lasers femtosecondes s'est généralisée dans des domaines aussi variés que la physique, la chimie, ou la biologie... De tels lasers sont en effet d'excellents outils pour réaliser des études dynamiques à des échelles de temps infiniment courtes, mais également pour générer des effets non linéaires très importants du fait de la puissance crête colossale des impulsions émises. Inévitablement, une impulsion lumineuse ultra-courte présentera un spectre large, spectre qui sera d'autant plus large que l'impulsion sera courte. Par voie de conséquence, la propagation d'une impulsion femtoseconde dans un milieu pourra donner lieu à des phénomènes complexes, chaque composante spectrale n'étant pas affectée de la même manière par la propagation. Par exemple, les propriétés d'un prisme sont bien connues : il disperse les composantes spectrales d'une lumière polychromatique. Il dispersera également les différentes composantes spectrales d'une impulsion ultracourte, affectant sa propagation de manière très significative. Ceci n'est qu'un des multiples effets possibles, l'interaction avec le milieu pouvant donner lieu à une multitude de phénomènes.

La caractérisation d'impulsions lumineuses consiste en partie à déterminer la dérive de fréquence que présentent ces impulsions. C'est devenu depuis les années 90 un domaine particulièrement important, indispensable pour maîtriser la formation d'impulsions ultra-courtes et également pour maîtriser et comprendre leur propagation et leur interaction dans les milieux qu'elles traversent [[7](#)] [[11](#)] [[12](#)] [[13](#)] [[14](#)].

Nous venons de voir que le formalisme de Fourier fractionnaire est parfaitement adapté à la description de la propagation d'impulsions lumineuses dans des milieux dispersifs. L'une des principales conséquences de la dispersion sur une impulsion est l'apparition de dérives de fréquence (linéaires dans le cas d'une dispersion en β_2). On comprend donc aisément que l'analyse de Fourier fractionnaire est adaptée à la caractérisation des dérives de fréquence d'impulsions ultra-courtes et plus généralement à la caractérisation d'impulsions ultra-courtes.

De manière plus mathématique, la transformée de Fourier d'un signal monochromatique est un pic de Dirac. Ainsi, l'analyse de Fourier est un outil parfait pour connaître le spectre d'un signal quelconque. De son côté, la transformée de Fourier fractionnaire d'un signal à dérive de fréquence linéaire est un pic de Dirac si l'ordre fractionnaire de la transformation est le bon. Ce sera donc l'outil approprié pour étudier des signaux à dérive de fréquence linéaire. Nous verrons également qu'il permet des caractérisations pour des dérives d'ordre supérieur.

Dans un premier temps, nous montrerons le potentiel de ces méthodes sur des signaux simples [[15](#)] [[16](#)]. Nous montrerons ensuite l'application de ces outils sur des mesures réelles issues de techniques expérimentales de caractérisation d'impulsions ultra-courtes [[17](#)].

1. Caractérisation d'un signal simple

Considérons une impulsion gaussienne d'amplitude :

$$U(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right)$$

Après propagation sur une distance z dans un milieu linéairement dispersif (caractérisé par un coefficient β_2), l'amplitude du champ électrique de l'impulsion s'écrit :

$$U(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^2 - i\beta_2 z)^{1/2}} \exp\left[\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right]$$

qui s'écrit :

$$U(z, T) = \frac{1}{(1 - iz/z_0)^{1/2}} \exp\left[-K^2 \frac{T^2}{2T_0^2}\right] \exp\left[-iL^2 \frac{T^2}{2T_0^2}\right]$$

où l'on a noté : $z_0 = T_0^2/\beta_2$, $K^2 = \frac{1}{1 + (z/z_0)^2}$ et $L^2 = \frac{z/z_0}{1 + (z/z_0)^2}$. C'est cette dernière impulsion dont nous allons caractériser l'amplitude via la transformée de Fourier fractionnaire. La transformée de Fourier fractionnaire d'ordre a de cette amplitude s'écrit :

$$\mathcal{F}_a[U(z, T)](z, T_a) = \frac{C(a)}{(1 - iz/z_0)^{1/2}} \exp\left(i \frac{\pi T_a^2}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-K^2 \frac{T^2}{2T_0^2}\right] \exp\left[-iL^2 \frac{T^2}{2T_0^2}\right] \exp\left(i \frac{\pi T^2}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)}\right) \exp\left(-i \frac{2\pi T_a T}{\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)}\right) dT$$

Si l'on respecte

$$\frac{L^2}{2T_0^2} - \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} = 0 \quad (1)$$

alors

$$\mathcal{F}_a[U(z, T)](z, T_a) = \frac{C(a)}{(1 - iz/z_0)^{1/2}} \exp\left(i \frac{\pi T_a^2}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)}\right) * \delta\left(\frac{T_a}{\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)}\right)$$

où δ est la distribution de Dirac. En somme, il existe un ordre fractionnaire particulier pour lequel la dérive de fréquence est transformée en pic de Dirac. Inversement, une fois cet ordre fractionnaire déterminé, on peut en déduire la dérive de fréquence via la relation (1).



Méthode

Notons toutefois que ceci implique de considérer un ordre fractionnaire complexe. Avec un ordre fractionnaire réel, on peut également repérer une dérive de fréquence linéaire comme l'illustre la figure 6. En appliquant au signal une transformée fractionnaire d'ordre a , puis en faisant varier a , on peut tracer $\text{Max}(\mathcal{F}_a[U(z, T)](z, T_a))$ en fonction de a . La figure 6 représente ainsi $\text{Max}(\mathcal{F}_a[U(z, T)](z, T_a))$ en fonction d'un ordre fractionnaire a réel.



Complément

On observe l'émergence d'un pic très nettement identifiable pour un ordre fractionnaire optimal. Une fois cet ordre fractionnaire déterminé, on peut en déduire la dérive de fréquence présente dans l'impulsion par la relation $\frac{L^2}{2T_0^2} - \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} = 0$ [15].

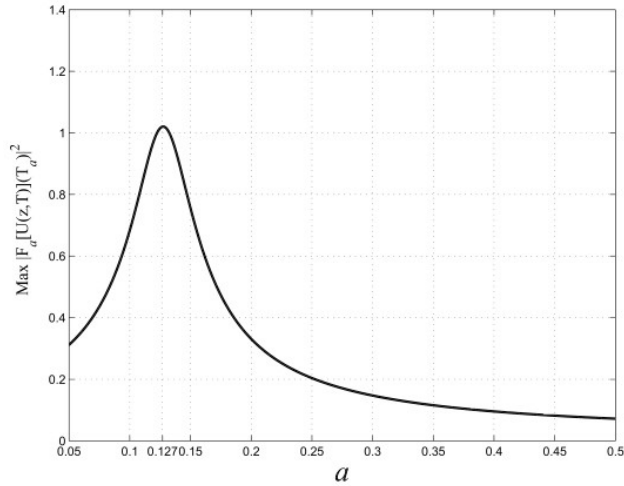


Figure 6 : Reconnaissance d'une dérive de fréquence linéaire

2. Caractérisation de 2 impulsions temporellement superposées, mais présentant des dérives de fréquences linéaires différentes

Considérons maintenant un signal qui serait constitué de 2 fonctions gaussiennes temporellement superposées, mais présentant des dérives de fréquence linéaires différentes. En appliquant à un tel signal une transformée fractionnaire d'ordre a , puis en faisant varier a , on peut tracer $Max(\mathcal{F}_a[U(z, T)](z, T_a))$ en fonction de a . Les résultats sont représentés sur la figure 7. On voit clairement apparaître deux ordres fractionnaires optimaux, caractéristiques des deux dérives de fréquence présentes dans l'impulsion. Les deux peuvent être connues avec précision en utilisant la relation (1) [15].

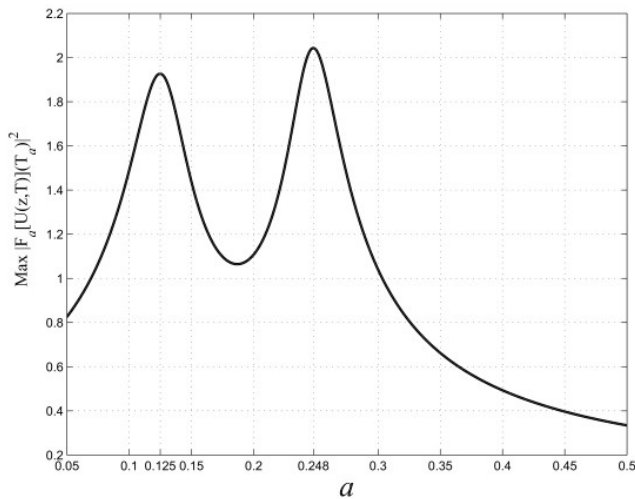


Figure 7 : Séparation et reconnaissance de 2 dérives de fréquence linéaires par transformée de Fourier fractionnaire

3. Techniques de décomposition en séries de Fourier fractionnaire

La décomposition d'un signal en série de Fourier est une technique très connue. De manière assez semblable, on peut développer des techniques de décomposition en séries de Fourier fractionnaire [18].



Fondamental

Pour une décomposition dans la base fractionnaire d'ordre a , on définit les fonctions de base :

$$\Theta_{n,a}(T) = \mathcal{F}_{-a}[\delta(T_a - n\kappa_0)]$$

où δ est la distribution de Dirac, κ_0 est dite "fréquence" centrale et $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ sont les ordres de décomposition. Ces fonctions de base sont alors données par :

$$\Theta_{n,a}(T) = \frac{C(-a)}{|C(a)|} \frac{\sqrt{\Delta T}}{\Delta T} \exp\left(-i \frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a\pi/2)} \left(T^2 + \left(\frac{n\varepsilon^2 \sin(a\pi/2)}{\Delta T}\right)^2\right) + i \frac{2\pi n T}{\Delta T}\right)$$

$\Theta_{0,a}(T)$ est une fonction à dérive de fréquence linéaire dite fonction "mère", les autres fonctions étant des expansions de cette fonction "mère".

Si l'on considère maintenant une fonction apériodique $U(T)$ définie sur l'intervalle $[-\Delta T/2, \Delta T/2]$, elle peut se décomposer sur la base de fonctions précédentes selon :

$$U(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_U(n, a) \Theta_{n,a}(T)$$

où les coefficients de décomposition sont donnés par :

$$C_U(n, a) = \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} U(T) \bar{\Theta}_{n,a}(T) dT$$

et où $\bar{\Theta}_{n,a}(T)$ dénote le complexe conjugué de $\Theta_{n,a}(T)$. En pratique, la reconstruction est tronquée à $-N \leq n \leq N$, avec N ajustable pour obtenir la reconstruction la plus fidèle possible. Prenons par exemple le signal impulsionnel :

$$U(T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \exp\left(-iL_0 \frac{T^2}{2T_0^2}\right)$$

où $T_0 = 100\text{fs}$ est la durée à mi-hauteur de l'impulsion et $L_0 = 1$ un paramètre de dérive de fréquence linéaire. La figure 8 présente le module des différents coefficients $C_U(n, a)$ dans le plan (n, a) . On peut voir en particulier émerger l'ordre fractionnaire privilégié $a_{opt} = 0,804$. Il s'agit de l'ordre optimal pour lequel on vérifie :

$$\tan(a_{opt} \pi/2) = \frac{\pi}{L_0} \frac{T_0^2}{\varepsilon^2}$$

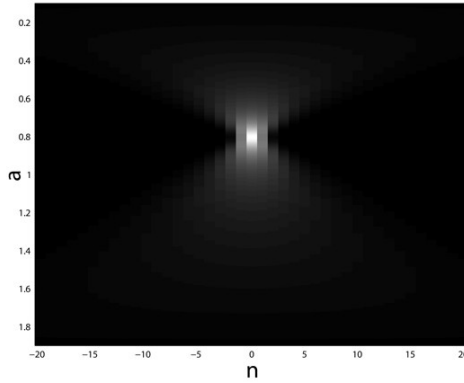


Figure 8 : Coefficients de décomposition en séries de Fourier fractionnaire dans le plan (n, a)

La détermination de cet ordre optimal permet de connaître la dérive de fréquence linéaire de l'impulsion. Nous avons pris ici $\epsilon = T_0$. Nous obtenons alors $L_0 = 1$ conforme à la valeur de L_0 choisie lors de cette simulation. La figure 9 présente de manière plus détaillée $|C_U(n, 0, 804)|^2$ en fonction du coefficient de décomposition n .

Si l'impulsion n'avait pas d'enveloppe gaussienne, il n'y aurait qu'un seul coefficient non nul en $n = 0$. Par ailleurs, si le signal contenait une dérive de fréquence d'ordre supérieur, le nombre de coefficients non nuls augmenterait. En particulier, on observerait une dissymétrie apparaître entre les coefficients à n positif ou négatif pour une dérive de fréquence supplémentaire quadratique [16].

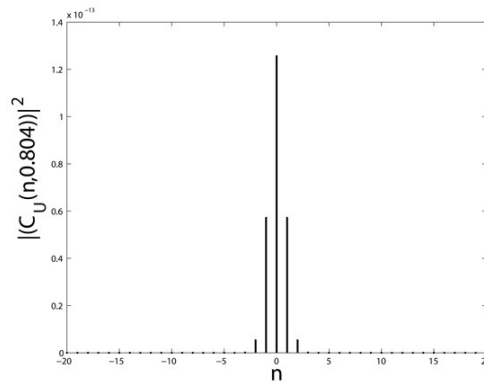


Figure 9 : Coefficients de décomposition en séries de Fourier fractionnaire en fonction de n pour $a = a_{opt}$

Une fois les coefficients $C_U(n, a)$ déterminés, il est possible de reconstruire la fonction de départ, comme le montre la figure 10. Notons que dans ce cas, la reconstruction est très fidèle. Les parties réelles et imaginaires des fonctions originale et reconstruite sont confondues [16].

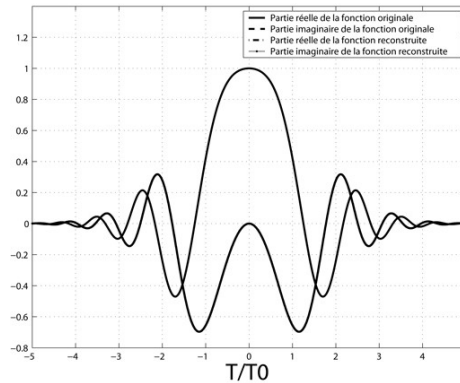


Figure 10 : Signal initial et reconstruit

4. Un exemple expérimental : l'analyse de signaux SPIRIT

Dans cette dernière partie, nous allons appliquer ces différentes techniques à un signal expérimental pour la caractérisation d'impulsions ultra-courtes.

La méthode SPIRIT (interférométrie spectrale résolue en temps) développée à XLIM (Limoges) consiste à créer 2 répliques décalées temporellement de l'impulsion à mesurer [19] [20]. Ces répliques sont ensuite dirigées vers un spectroscope, les deux légèrement décalées spatialement l'une par rapport à l'autre, équivalent à un décalage spectral. Un tel montage produit un interférogramme instationnaire donné par [19] [20] :

$$S(\omega, t) = |\tilde{E}(\omega)|^2 + |\tilde{E}(\omega + \Omega)|^2 + 2|\tilde{E}(\omega)\tilde{E}(\omega + \Omega)|\cos[\omega\tau + \Omega t + \phi(\omega) - \phi(\omega + \Omega)]$$

où $\tilde{E}(\omega)$ est la transformée de Fourier de l'amplitude du champ incident, $\phi(\omega)$ sa phase spectrale, Ω le décalage spectral, et τ le délai temporel entre les 2 répliques. t est le temps. Après simplification, on peut écrire :

Considérons le cas d'impulsions présentant une phase spectrale possédant des termes quadratique et cubique :

$\phi(\omega) = \frac{1}{2}\phi^{(2)}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{3}\phi^{(3)}(\omega - \omega_0)^3$. L'interferogramme SPIRIT contient alors des termes de la forme $\cos[\omega\tau + \Omega t - \Omega\phi^{(2)}(\omega - \omega_0) - \Omega\phi^{(3)}(\omega - \omega_0)^2]$ et donc des termes avec une dérive de fréquence linéaire : le terme $\Omega\phi^{(3)}(\omega - \omega_0)^2$. Il existe donc un ordre fractionnaire particulier qui permet de retrouver cette dérive linéaire. La correspondance entre cet ordre fractionnaire optimal a_{opt} et le terme de phase

correspondant est donnée par :

$$\frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a_{opt} \pi / 2)} = \Omega \phi^{(3)}$$

Inversement, le terme de phase est directement obtenu à partir de l'ordre fractionnaire optimal par la relation :

$$\phi^{(3)} = \frac{\pi}{\Omega \varepsilon^2 \tan(a_{opt} \pi / 2)}$$

La figure 11 montre un exemple expérimental de signal SPIRIT de ce type

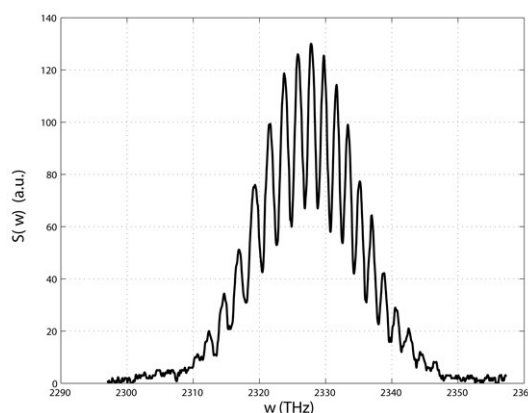


Figure 11 : Interférogramme expérimental SPIRIT

- Dans un premier temps, nous avons réalisé des transformées de Fourier fractionnaire de différents

ordres de cet interférogamme. La figure 12 illustre les résultats. Il y un ordre bien particulier ($a_{opt}=1,8$) qui permet de mettre en évidence la dérive de fréquence linéaire présente dans le signal : on voit apparaître un pic très fin. Pour comparaison, ce pic est totalement absent pour un autre ordre $a = 1,5$.

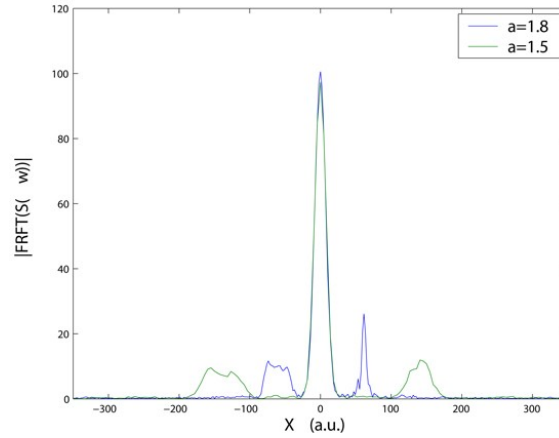


Figure 12 : 2 transformées de Fourier fractionnaires d'ordres différents de l'interférogamme SPIRIT expérimental

- Dans un deuxième temps, nous avons appliqué la technique de décomposition en séries de Fourier fractionnaires à l'interférogamme. La figure 13 montre les valeurs des différents ordres de décomposition $|C_S(n, a)|$ dans le plan (n, a) .

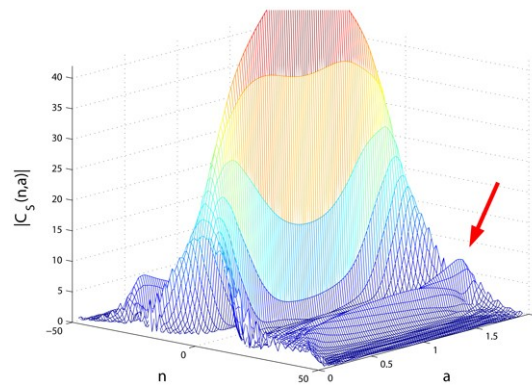


Figure 13 :

Figure 13 : Cartographie des coefficients de décomposition $|C_S(n, a)|$

On peut y distinguer un domaine particulier (voir la flèche). Il est dû au terme de dérive de fréquence linéaire du signal SPIRIT. Ce pic se situe à la position $a = a_{opt} = 1,8$ (comme précédemment). Nous avons alors

$$\frac{\pi}{\varepsilon^2 \tan(a_{opt} \pi/2)} - \Omega \phi^{(3)} = 0$$

Nous avons pris $\varepsilon = 20 \text{ THz}$ dans ces simulations, ce qui permet d'en déduire $\phi^{(3)} \simeq -0,009 \text{ ps}^3$. Par ailleurs ce pic est à la position $n = n_{opt} = 30$ et nous pouvons écrire :

$$\tau - \Omega \phi^{(2)} - \frac{2\pi n_{opt}}{\Delta\omega} = 0$$

où $\Delta\omega$ le support de l'interférogamme. Dans notre cas $\Delta\omega = 60,04 \text{ THz}$, $\Omega = 2,87 \text{ THz}$ et

$\tau = 2,97\text{ps}$. Nous pouvons alors en déduire : $\phi^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \left(\tau - \frac{2\pi n_{opt}}{\Delta\omega} \right) \simeq -0,06\text{ps}^2$



Remarque

Ces valeurs ont pu être confirmées expérimentalement [[17](#)].



Attention

Les techniques fractionnaires permettent de déterminer les coefficients de phase spectrale quadratique et cubique.



Remarque

Lorsque l'on procède à une décomposition en séries de Fourier fractionnaire, on peut ensuite reconstruire le signal de départ sur la base de cette décomposition. Un filtrage est alors possible si l'on ajuste le nombre de fonctions considérées dans le processus de reconstruction.

La figure 14 illustre une telle reconstruction à partir d'un interférogramme bruité (il s'agit dans ce cas de simulation). La reconstruction a été faite en prenant en compte toutes les fonctions entre $n = -80$ et $n = 80$. Le bruit est efficacement éliminé via la reconstruction.

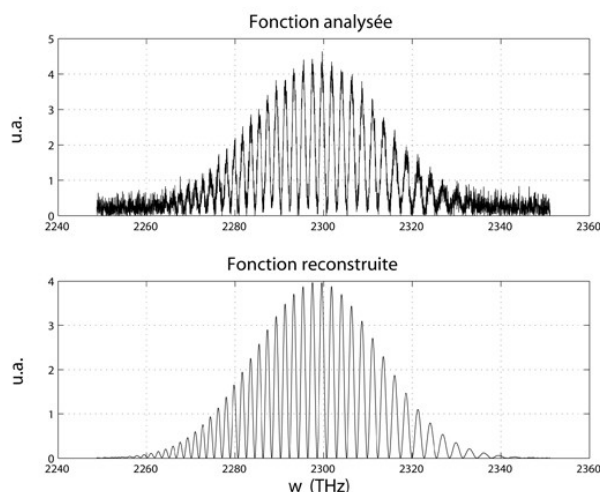


Figure 14 : Signal bruité puis reconstruit

* *
*

Le but de ce chapitre était de présenter le potentiel de l'analyse de Fourier fractionnaire pour la description d'impulsions lumineuses. Nous avons pu montrer en particulier que ce formalisme décrit très bien la propagation d'impulsions lumineuses dans des milieux dispersifs. Il est également bien adapté à la caractérisation d'impulsions lumineuses à dérives de fréquences.

Notons qu'il ne s'agit pas pour nous de vouloir remplacer les techniques classiques existantes, mais plutôt de présenter des techniques peu connues qui ont un réel potentiel d'analyse.

Remerciements : Je remercie Sébastien Coëtmellec et Denis Lebrun avec qui ont été réalisées ces études. Je remercie également Frédéric Louradour et Mikaël Lelek qui ont enregistré la trace expérimentale SPIRIT (figure 11).

Bibliographie



- [1] The Fractional Order Fourier Transform and its Application to Quantum Mechanics
V. Namias, The Fractional Order Fourier Transform and its Application to Quantum Mechanics, J. Inst. Math. Appl. 25, 241-265, 1980.
- [2] Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform
A. W. Lohmann, Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform, J. Opt. Soc. Am. A 10, 2181-2186, 1993.
- [3] Fractional Fourier transforms and their optical implementation : I
D. Mendlovic, H. Ozaktas, Fractional Fourier transforms and their optical implementation : I, Opt. Soc. Am. A 10, 1875-1881 1993.
- [4] Fractional Fourier optics
H. Ozaktas, D. Mendlovic, Fractional Fourier optics, J. Opt. Soc. Am. A 12, 742-751, 1995.
- [5] Fresnel diffraction and fractional-order Fourier transform
P. Pellat-Finet, Fresnel diffraction and fractional-order Fourier transform, Opt. Lett. 19, 1388-1390, 1994.
- [6] Fractional fourier transform : photonic implementation
A. W. Lohmann, D. Mendlovic, Fractional fourier transform : photonic implementation, Appl. Opt. 33, 7661-7664, 1994.
- [7] Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating
R. Trebino, K. W. Delong, D. N. Fittinghoff, J. N. Sweetser, M. A. Krumbügel, B.A. Richman, D.J. Kane, Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating, Rev. Sci. Instrum. 68, 3277-3295, 1997.
- [8] Nonlinear Fiber Optics
GP Agrawa, Nonlinear Fiber Optics, *CA :Academic*, San Diego, 1995.
- [9] Group Velocity Dispersion with fractional-order Fourier formalism
S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, J.B. Lecourt, Group Velocity Dispersion with fractional-order Fourier formalism, J. Opt. A : Pure Appl. Opt. 5, 26-30, 2003.
- [10] Fractional-order Fourier formulation of the propagation of partially-coherent light pulses
M. Brunel, S. Coëtmellec, Fractional-order Fourier formulation of the propagation of partially-coherent light pulses, Opt. Commun. 230, 1-5, 2004.
- [11] Using phase retrieval to measure the intensity and phase of ultrashort pulses : frequency-resolved optical gating
R. Trebino, D.J. Kane, Using phase retrieval to measure the intensity and phase of ultrashort pulses : frequency-resolved optical gating, J. Opt. Soc. Am. A 10, 1101-1110, 1993.
- [12] Direct determination of the amplitude and the phase of femtosecond light pulses

- J.A. Chilla, O.E. Martinez**, Direct determination of the amplitude and the phase of femtosecond light pulses, *Opt. Lett.* 16, 39-41, 1991.
- [13] Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses
- C. Iaconis, I.A. Walmsley**, Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses, *Opt. Lett.* 23, 792-794, 1998.
- [14] Self-referencing spectral interferometry for measuring ultrashort optical pulses
- C. Iaconis, I.A. Walmsley**, Self-referencing spectral interferometry for measuring ultrashort optical pulses, *IEEE J. Quantum Electron.* 35, 501-509, 1999.
- [15] Characterization of chirped pulses with the fractional-order Fourier transformation
- S. Coëtmelec, M. Brunel, D. Lebrun, C. Özkul**, Characterization of chirped pulses with the fractional-order Fourier transformation, *J. Opt. Soc. Am. A* 18, (11), 2754-2759, 2001.
- [16] Fractional-order Fourier series expansion for the analysis of chirped pulses
- S. Coëtmelec, M. Brunel, D. Lebrun and J.B. Lecourt**, Fractional-order Fourier series expansion for the analysis of chirped pulses, *Opt. Commun.* 249, 145-152, 2005.
- [17] Fractional-order Fourier analysis for ultrashort pulse characterization
- M. Brunel, S. Coëtmelec, M. Lelek, F. Louradour**, Fractional-order Fourier analysis for ultrashort pulse characterization, *J. Opt. Soc. Am. A* 24, No. 6, 1641-1646, 2007.
- [18] Fractional Fourier series expansion for finite signals and dual extension to discrete-time fractional Fourier transform
- Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh, Tzyy-Liang Luo**, Fractional Fourier series expansion for finite signals and dual extension to discrete-time fractional Fourier transform, *IEEE Trans. On Signal Processing* 47, 2883-2888, 1999.
- [19] Coherent measurement of short laser pulses based on spectral interferometry resolved in time
- V. Messenger, F. Louradour, C. Froehly, A. Barthelemy**, Coherent measurement of short laser pulses based on spectral interferometry resolved in time, *Opt. Lett.* 28, 743-745, 2003.
- [20] Time resolved spectral interferometry for single shot femtosecond characterization
- M. Lelek, F. Louradour, A. Barthelemy, C. Froehly**, Time resolved spectral interferometry for single shot femtosecond characterization, *Opt. Commun.* 261, 124-129, 2006.